О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВОГО ПРЕДЕЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Чехов, доктор физико-математических наук, профессор, С. О. Папков, аспирант

Асимптотическое поведение решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений изучалось в работах Б.М. Кояловича [1,2], Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [3], В. Т. Гринченко [4]. Для парной бесконечной системы с неотрицательными коэффициентами:

$$x_j = \sum_{s=1}^{\infty} a_{j,s} y_s + f_j,\ y_j = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{j,s} x_s + q_j \ (j=1,2,3,\ldots) \tag{1}$$

Б. М. Кояловичем сформулированы [1] два достаточных условия сходимости последовательностей $\{x_j\}, \{y_j\}$ к одному и тому же положительному пределу.

Аналогичные условия сформулированы здесь для бесконечной системы вида:

$$z_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} z_n + b_k \ (k=1,2,3,\ldots). \tag{2}$$

Показано, что второе из условий Б.М. Кояловича применительно к системе должно быть опущено. Предполагается, что коэффициенты системы (2) неотрицательны ($c_{k,n} \geq 0$; $b_k \geq 0 \quad \forall k,n \in \mathrm{N}$), удовлетворяют условиям регулярности

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} < 1 \tag{3}$$

и теореме существования решения:

<u>Теорема1.</u> Если $\exists B > 0: \quad \forall k \in \mathrm{N} \quad b_k \leq B\rho_k \qquad (\rho_k = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} > 0)$, (4)

то $\exists \{z_k\}$ – ограниченное главное решение регулярной бесконечной системы (2):

$$\forall k \in \mathrm{N} \qquad 0 \leq z_k \leq B. \tag{5}$$

Доказательство основано [3] на том, что следующая из условия (4) мажорантная для системы (2) бесконечная система:

$$Z_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} Z_n + B\rho_k \ (k=1,2,3,\ldots) \tag{6}$$

имеет тривиальное положительное решение $Z_k = B$. Главным решением называют решение, которое может быть вычислено методом последовательных приближений с нулевым начальным приближением:

$$z_k = \lim_{m\to\infty} z_k^{(m)}; \quad z_k^{(0)} = 0; \quad z_k^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n} z_n^{(m-1)} + b_k \ (k,m=1,2,3,\ldots).$$

Очевидно, что главное решение однородной системы ($b_k = 0 \ \forall k$ N) совпадает с нулевым решением.

Проблема единственности ограниченного решения системы (2) связывается [3] со свойствами мажорантной системы (6). Для системы с неотрицательными коэффициентами можно сформулировать следующее предложение:

Теорема 2. Для единственности ограниченного решения регулярной бесконечной системы (2) с неотрицательными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы положительное решение $Z_k = B$ мажорантной системы (6) совпадало с главным решением системы (6).

Доказательство достаточности сводится к известной [3] теореме, поскольку выполнение условия приводит к ограниченности снизу положительным числом

В главного решения мажорантной системы (6). Необходимость же следует из того, что матрицы систем (2) и (6) одинаковы. Из единственности ограниченного решения системы (2) следует, что соответствующая системе (6) однородная регулярная бесконечная система имеет только нулевое ограниченное решение.

Поэтому все ограниченные решения системы (6) совпадают с ограниченным решением $Z_k = B$

Для того, чтобы нижний предел ограниченного решения $\{z_k\}$системы (2) был положительным, достаточно, чтобы последовательность $\{z_k\}$ была ограничена снизу некоторым положительным числом. Докажем предложение, позволяющее находить иногда такое положительное число, анализируя последовательность отношений $\{b_k / \rho_k\}$.

Теорема 3. Если выполнено условие (4) существования ограниченного решения регулярной бесконечной системы (2) с неотрицательными коэффициентами, то для ограниченности этого решения снизу положительным числом достаточно двух дополнительных условий:

$$\text{a) } \exists \inf_{k \ge 1} (b_k / \rho_k) = h > 0; \tag{7}$$

b) главное решение $\{z_k\}$ бесконечной системы (2) является единственным ограниченным решением.

Доказательство. Из условия (4) следует существование мажорантной системы (6) для системы (2), главное решение которой согласно условию b) и теореме 2 совпадает с тривиальным положительным решением. Подстановкой $Z_k = B$ в (6) и последующим вычитанием системы (2) приходим к следующей регулярной бесконечной системе с неотрицательными коэффициентами:

$$B - z_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n}(B - z_n) + B\rho_k - b_k \ (k=1,2,3,\ldots). \tag{8}$$

Согласно условию (7) для бесконечной системы (8) выполнено условие (4): $\exists B_1 = B - h > 0 : \ \forall k \in \mathrm{N} \quad B\rho_k - b_k \le B_1\rho_k$. Поэтому существует главное решение $\{B - z_k\}$ системы (8), удовлетворяющее неравенству (5): $B - z_k \le B - h$, эквивалентному условию:

$$\forall k \ge 1 \qquad z_k \ge h. \tag{9}$$

Приведем пример регулярной бесконечной системы

$$z_k = (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) z_{k+1} + (1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}) / (k+1)^2 \quad (k=1,2,3,\ldots) \qquad (10)$$

с неотрицательными коэффициентами, для которой условие b) не выполняется, поскольку эта бесконечная система имеет однопараметрическое множество ограниченных решений $z_k = 1/k + C\, k/(k+1)$. Здесь $C \in \mathbf{R}$; $\rho_k = 1/(k+1)^2$; $b_k / \rho_k = 1 + 1/k + 1/(k+1) \in [1, 2.5]$; $h = 1$; $B = 2.5$; мажорантная система

$$Z_k = (1 - \frac{1}{(k+1)^2}) Z_{k+1} + \frac{2.5}{(k+1)^2} \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

имеет тривиальное решение $Z_k = 2.5$, которое не совпадает с главным решением $Z_k = 2.5/(k+1)$. Соответственно главное решение $z_k = 1/k$ системы (10) нарушает неравенство (9) при $k > 1$.

Более содержательные условия положительности нижнего предела для главного решения системы (2) получаются на основе анализа свойств лимитант, введенных Б.М. Кояловичем [1]. Лимитанты вводятся в предположении, что значения первых p неизвестных главного решения системы (2) вычислены. Остальные неизвестные удовлетворяют системе

$$\forall k > p \qquad z_k = \sum_{n=p+1}^{\infty} c_{k,n} z_n + b_k^{(p)} \quad ; \quad b_k^{(p)} = b_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} z_n . \qquad (11)$$

В соответствии с неравенством (3) система (11) является регулярной, и для нее величины $\rho_k^{(p)}$ из условия (4) принимают вид:

$$\forall k > p \qquad \rho_k^{(p)} = 1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} c_{k,n} = \rho_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} > 0 . \qquad (12)$$

Лимитантами названы [1] отношения:

$$\forall k > p \qquad V_k^{(p)} = b_k^{(p)} / \rho_k^{(p)} = (b_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} z_n) / (\rho_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n}) . \qquad (13)$$

Название связано с тем, что точные грани лимитант:

$$B^{(p)} = \sup_{k>p} V_k^{(p)}; \qquad h^{(p)} = \inf_{k>p} V_k^{(p)} \qquad (14)$$

служат [3] границами для главного решения бесконечной системы (11):

$$\forall k > p \quad h^{(p)} \le z_k \le B^{(p)} . \qquad (15)$$

Левая часть неравенства для z_k справедлива, как и неравенство (9), при условии единственности ограниченного (главного) решения систем (2) и (11).

При возрастании параметра p грани лимитант образуют последовательности границ вложенных промежутков:

$$\forall k > p+1 \qquad h^{(p)} \le h^{(p+1)} \le z_k \le B^{(p+1)} \le B^{(p)} . \qquad (16)$$

Согласно теореме о встречных последовательностях [5] обе последовательности граней $\{h^{(p)}\}$ и $\{B^{(p)}\}$ имеют конечные пределы.

$$\exists \lim_{p\to\infty} h^{(p)} = h \ ; \quad \exists \lim_{p\to\infty} B^{(p)} = B \ ; \quad h \le B . \tag{17}$$

Достаточные условия Б.М. Кояловича для существования положительного предела решения парной бесконечной системы (1) с неотрицательными коэффициентами запишем в виде следующего предложения:

Теорема 4. Чтобы существовал положительный предел главного решения_парной регулярной бесконечной системы с неотрицательными коэффициентами, кроме условия существования решения, достаточно выполнения двух условий:

$$\text{a)}\ \exists L \ge l > 0: \quad \forall j,s \in \mathrm{N} \quad (s < j) \quad l \le a_{j,s} / \rho_{2j-1},\ \alpha_{j,s} / \rho_{2j} \le L ; \tag{18}$$

$$(\rho_{2j-1} = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} a_{j,s} \ ; \quad \rho_{2j} = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{j,s})$$

$$\text{b)}\ \exists \theta > 0: \qquad \forall p,k \in \mathrm{N} \quad (2p < k \le 4p) \qquad \rho_k^{(2p)} \ge \theta . \tag{19}$$

Для системы (2) перепишем условия этой теоремы несколько иначе.

Теорема 5. Чтобы существовал положительный предел главного решения_неоднородной регулярной бесконечной системы (2) с неотрицательными коэффициентами, кроме условия (4) существования решения, достаточно выполнения двух дополнительных условий:

$$\text{a)}\ \exists L \ge l > 0: \quad \forall k,n \in \mathrm{N} \quad (n < k) \qquad l\rho_k \le c_{k,n} \le L\rho_k ; \tag{20}$$

b) главное решение $\{z_k\}$ бесконечной системы (2) является единственным ограниченным решением.

Здесь условие b) теоремы 4 заменено условием единственности ограниченного решения, без которого несправедливы нижние оценки в неравенствах (15), (16).

Доказательство. Согласно условию (20) все диагонали, расположенные ниже главной диагонали, заполнены положительными числами. Совместно с неотрицательностью свободных членов $\{b_k\}$ это приводит к следующему свойству главного решения системы (2):

$$\exists m_0 \in \mathrm{N}: \quad \forall k \ge m_0 \qquad z_k > 0 . \tag{21}$$

Действительно, главное решения $\{z_k\}$ системы (2) неотрицательно. Оно не может быть нулевым для неоднородной системы. Поэтому $\exists m \in \mathrm{N}: \ z_m > 0$. Из системы (2) с учетом положительности диагоналей матрицы, расположенных ниже главной, следует положительность последовательности $\{z_{m+1},\ z_{m+2},\ldots\}$, что и приводит к значению $m_0 = m$. Полагая $p > m_0$, запишем неравенства для сумм в выражениях лимитант (13), следующие из условия (20):

$$\forall k > p \quad l\rho_k \sum_{n=1}^{p} z_n \le \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} z_n \le L\rho_k \sum_{n=1}^{p} z_n ; \quad l\rho_k p \le \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} \le L\rho_k p . \tag{22}$$

С их помощью находится оценка лимитант снизу

$$\forall k > p \qquad V_k^{(p)} \ge \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} z_n /(\rho_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n}) \ge l \sum_{n=1}^{p} z_n / (1 + Lp) \equiv \omega^{(p)} .$$

Величина $\omega^{(p)} > 0$ не зависит от k, поэтому $h^{(p)} = \inf\limits_{k>p} V_k^{(p)} \geq \omega^{(p)}$, и предел неубывающей последовательности $\{h^{(p)}\}$ положителен.

$$\lim_{p\to\infty} h^{(p)} = h \geq \omega^{(p)} > 0. \qquad (23)$$

Таким образом, условие а) обеспечивает положителеность нижнего предела h последовательности лимитант. Теперь можно показать, что при фиксированном достаточно большом k все лимитанты $V_k^{(p)}$ как угодно близко приближаются к нижнему пределу h при возрастании параметра p.

Фиксируя $p=p_0$, представим неизвестные в виде:

$$\forall k > p_0 \; z_k = h^{(p_0)} + \delta_k, \; \delta_k \geq 0. \qquad (24)$$

Выбирая $p_1 > p_0$ и подставляя (24) в выражение (13), разложим лимитанты на

две части $V_k^{(p_1)} = U_k^{(p_1)} + \eta_k$. (25)

$$U_k^{(p_1)} = (b_k^{(p_0)} + h^{(p_0)} \sum_{n=p_0+1}^{p_1} c_{k,n}) / \rho_k^{(p_1)} \quad ; \qquad \eta_k = \sum_{n=p_0+1}^{p_1} c_{k,n}\delta_n / \rho_k^{(p_1)}. \qquad (26)$$

С помощью зависимостей (12), (13) можно проверить тождество:

$$U_k^{(p_1)} - h^{(p_0)} = (V_k^{(p_0)} - h^{(p_0)})\rho_k^{(p_0)} / \rho_k^{(p_1)} \quad . \qquad (27)$$

Поскольку $V_k^{(p_0)} \geq h^{(p_0)}$, то из тождества следует неравенство:

$$\forall k > p_1 U_k^{(p_1)} \geq h^{(p_0)} . \qquad (28)$$

Для оценки величины η_k перепишем первое утверждение (17) в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_0(\varepsilon): \qquad \forall p \geq p_0 \qquad 0 \leq h - h^{(p)} < \varepsilon . \qquad (29)$$

Последовательность $\{h^{(p)}\}$ неубывающая, поэтому $h^{(p_0)} \leq h^{(p_1)} \leq h$. Отсюда и

из (29) следует неравенство: $\qquad h^{(p_1)} - h^{(p_0)} < \varepsilon .$ (30)

Нижняя грань $h^{(p_1)}$ достигается при некотором $k_1 > p_1$, либо при $k \to \infty$:

$$h^{(p_1)} = V_{k_1}^{(p_1)} \quad \text{, либо } h^{(p_1)} = \lim_{k\to\infty} V_k^{(p_1)} \quad . \qquad (31)$$

Выразим величину η_{k_1} из (25) и оценим с помощью неравенств (28),(30)

$$\eta_{k_1} = V_{k_1}^{(p_1)} - U_{k_1}^{(p_1)} = h^{(p_1)} - U_{k_1}^{(p_1)} \leq h^{(p_1)} - h^{(p_0)} < \varepsilon \text{, или } \lim_{k\to\infty} \eta_k \leq \varepsilon \quad . \qquad (32)$$

Из второго выражения (26) следует $\sum\limits_{n=p_0+1}^{p_1} c_{k_1,n}\delta_n = \eta_{k_1}\rho_{k_1}^{(p_1)} < \varepsilon\rho_{k_1} + \varepsilon \sum\limits_{n=1}^{p_1} c_{k_1,n}$,

поэтому для отношения сумм получается неравенство:

$$g_{k_1} \equiv \sum_{n=p_0+1}^{p_1} c_{k_1,n}\delta_n / \sum_{n=1}^{p_1} c_{k_1,n} < \varepsilon + \varepsilon\rho_{k_1} / \sum_{n=1}^{p_1} c_{k_1,n} . \qquad (33)$$

С учетом неравенств (22) получаем

$$g_{k_1} < (1+\frac{1}{lp_1})\varepsilon \text{, или } \varliminf_{k\to\infty} g_k \le (1+\frac{1}{lp_1})\varepsilon . \qquad (34)$$

Теперь можно оценить сверху величины η_k $\forall k > p_1$. Из выражения (26) для η_k при последовательном использовании оценок (22) для сумм следует

$$\eta_k < g_k \le \frac{L\rho_k}{l\rho_k p_1}\sum_{n=p_0+1}^{p_1}\delta_n = \frac{L^2}{l^2 p_1 L}\sum_{n=p_0+1}^{p_1} l\delta_n = \frac{L^2}{l^2 L\rho_{k_1} p_1}\sum_{n=p_0+1}^{p_1} l\rho_{k_1}\delta_n \le \frac{L^2}{l^2} g_{k_1} .$$

Наконец, из оценок (34) находим $\forall k > p_1$ $\eta_k \le \frac{L^2}{l^2}(1+\frac{1}{lp_1})\varepsilon$. (35)

Положительное число ε можно сделать как угодно малым, выбирая достаточно большим параметр p_0 в неравенствах (29). При этом как угодно малой будет составляющая η_k лимитанты $V_k^{(p_1)}$ в (25).

Оценим снизу величины $\rho_k^{(p_1)}$ посредством неравенств (22)

$$\forall k > p_1 \qquad \rho_k^{(p_1)} = \rho_k + \sum_{n=1}^{p_1} c_{k,n} \ge \rho_k(1+lp_1) . \qquad (36)$$

С увеличением параметра p_1 неограничено возрастает величина $\rho_k^{(p_1)}$, При этом левая часть в тождестве (27) может быть сделана меньше числа ε выбором параметра p_1, от которого числитель в правой части (27) не зависит:

$$\forall p > p_1 \quad (k > p) \qquad 0 < U_k^{(p)} - h^{(p_0)} < \varepsilon .$$

Отсюда и из неравенства (29) (при значении $p=p_0$) получается сходимость величин $U_k^{(p)}$ к значению h: $\forall p > p_1$ $(k > p)$ $-\varepsilon < U_k^{(p)} - h < \varepsilon$, (37) что равносильно сходимости лимитант $V_k^{(p)}$ к нижнему пределу h, так как составляющая η_k лимитанты $V_k^{(p)}$ согласно неравенству (35) стремится к нулю с возрастанием параметра p.

Изменив представление (24) на следующее: $\forall k > p_0\, z_k = B^{(p_0)} - \Delta_k$, $\Delta_k \ge 0$, (38)

после аналогичной модификации соотношений (25)- (37) установим, что при неограниченном возрастании параметра p все лимитанты $V_k^{(p)}$ как угодно близко приближаются к верхнему пределу B из соотношений (17). Применяя к последовательности лимитант $\{V_k^{(p)}, V_k^{(p+1)}, V_k^{(p+2)}, \dots\}$ теорему о единственности предела [5], получим равенство $h = B$, что и требовалось доказать.

В заключение приведем пример регулярной бесконечной системы

$$\forall k \in \mathrm{N} \quad x_k = \frac{2k^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^2+k^4} + \frac{1}{3k^2} - \frac{1}{k^4\pi} + \frac{1}{k^6\pi^2} - (1+\frac{1}{k^4\pi})\frac{e^{-k^2\pi}}{sh(k^2\pi)}, \qquad (39)$$

которая имеет единственное ограниченное решение $x_k=1-1/(k^2\pi)$. Здесь условия теоремы 5 выполнены (l=32/17, L=2). А второе условие теоремы 4, которое для системы (39) принимает вид:

$$\exists\theta > 0: \qquad \forall p,k \in \mathrm{N} \quad (p < k \le 2p) \qquad \rho_k^{(p)} \ge \theta \tag{40}$$

не выполняется. Действительно, величина $\rho_k^{(p)}$ в соответствии с формулами (12) представляется выражением $\rho_k^{(p)} = 1 + \dfrac{2k^2}{\pi(p^2+k^4)} - \dfrac{2k^2}{\pi}\sum\limits_{n=p}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+k^4}$, которое после применения формулы суммирования Эйлера-Маклорена [6] для оценки асимтотического поведения ряда $\sum\limits_{n=p}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+k^4}$ при больших значениях p и замены k = p t; t∈]1, 2] принимает вид:

$$\pi\,\rho_{pt}^{(p)} \sim arctg\left(\frac{1}{pt^2}\right) + \frac{t^2}{p^2+t^2} + o(p^{-2})\,.$$

Следовательно величина $\rho_{pt}^{(p)} \to 0$ при $p \to \infty$, и положительной нижней грани θ для условия (40) не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений. - Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1930, 3, с.41-167.

2. Коялович Б.М. К теории бесконечных систем линейных уравнений.–Труды Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1932, 2, №4, с.1-16.

3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.–Л., Физматгиз, 1962. 695 с.

4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К., Наук. Думка, 1978. 264 с.

5. Избранные главы анализа и высшей алгебры: учебн. пособие / Фаддеев Д.К., Вулих Б.З., Уральцева Н.Н. и др.– Л-д, Изд-во Ленингр. ун-та, 1981, 200 с.

6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. /Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.– М., Наука, 1979. 832 с.