ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПАРЫ ВЗАИМНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. И. Мягков, кандидат физико-математических наук, доцент

Пусть F — поверхность в евклидовом пространстве E^3, отнесенная к криволинейным координатам u и v; Q — фиксированная точка. С каждой точкой $M(u,v)\in F$ сопоставим два вектора: радиус-вектор $\overline{QM}=\bar r(u,v)$ и вектор нормали $\bar n(u,v)$ к поверхности F в этой точке.

Две поверхности F и F^* называются взаимными с центром взаимности в точке Q, если существует такое точечное взаимно однозначное соответствие, при котором для каждой пары соответствующих точек $M(u,v)$ и $M^*(u,v)$ радиус-вектор первой поверхности будет параллелен вектору нормали ко второй поверхности и, наоборот, радиус-вектор второй поверхности будет параллелен вектору нормали к первой поверхности, т.е. для пары взаимных поверхностей выполняются условия

$$\bar r(u,v)\ \|\ \bar n^*(u,v),\quad \bar r^*(u,v)\ \|\ \bar n(u,v). \tag{1}$$

Соответствующие друг другу точки M и M^* имеют совпадающие криволинейные координаты. Преобразование поверхности F во взаимную поверхность F^* с центром взаимности Q назовем преобразованием взаимности и обозначим через H_Q (Q — центр преобразования).

В 1966 году Н. И. Кованцов сформулировал задачу: для заданной поверхности и заданного центра взаимности Q найти взаимную поверхность F^*.

Если допустить, что для заданной поверхности F существует взаимная поверхность F^*:

$$\overline{QM}^*\equiv\bar r^*(u,v)=\{x^*(u,v),y^*(u,v),z^*(u,v)\},$$

то из (1) получим систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех искомых функций $x^*(u,v)$, $y^*(u,v)$, $z^*(u,v)$.

Методом безынтегрального представления [1,2] в статье [3] было найдено в явном виде решение задачи Н.И. Кованцова в n-мерном евклидовом пространстве E^n. В частности, если $n=3$ и для поверхности F

$$\overline{QM}\equiv\bar r(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$$

выполняются два условия

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{pmatrix}=2,\ (\bar r,\bar n)\neq 0, \tag{2}$$

то для F существует взаимная поверхность F^* и она задается [3] векторным уравнением

$$\overline{QM}^*\equiv\bar r^*=c\frac{\bar n}{(\bar r,\ \bar n)}. \tag{3}$$

Здесь $C=const\neq 0$, $(\bar{r},\ \bar{n})$ — скалярное произведение.

В [4] анонсирована следующая

Теорема. Под действием преобразования взаимности H асимптотическая сеть поверхности F переходит в асимптотическую сеть взаимной поверхности $F^{*}=H(F)$.

Доказательство. Допустим, что на F существует асимптотическая γ с кривизной $k\neq 0$. Отнесем γ к длине дуги s и к каждой точке $P(s)\in\gamma$ присоединим репер Френе $\{P,\ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$. Тогда

$$\bar{P}'=\bar{e}_1, \tag{4}$$

$$\bar{e}_1'=k\bar{e}_2,\ \bar{e}_2'=-k\bar{e}_1+\varpi\bar{e}_3,\ \bar{e}_3'=-\varpi\bar{e}_2 \tag{5}$$

Здесь k и ϖ — кривизна и кручение асимптотической γ. Вектор бинормали $\bar{e}_3$ кривой γ совпадает с вектором нормали $\bar{n}$ к F.

Пусть разложение вектора $\bar{P}(s)$ по векторам $\bar{e}_i(s)$ имеет вид

$$\bar{P}(s)=A(s)\bar{e}_1(s)+B(s)\bar{e}_2(s)+E(s)\bar{e}_3(s). \tag{6}$$

Продифференцируем обе части (6):

$$\bar{P}'(s)=(A'-kB)\bar{e}_1+(B'+kA-\varpi E)\bar{e}_2+(E'+\varpi B)\bar{e}_3. \tag{7}$$

В силу (4) из (7) получаем три следствия

$$A'=kB+1,\ B'=-kA+\varpi E,\ E'=-\varpi B. \tag{8}$$

Рассмотрим кривую $\overset{*}{\gamma}=H_0(\gamma)$ на F^{*}, она задается (см. (3)) уравнением

$$\overline{QM}^{*}\equiv\bar{r}^{*}=c\frac{\bar{e}_3}{(\bar{P},\bar{e}_3)}. \tag{9}$$

Используя (9), (4), (5) и (6), найдем два вектора

$$\bar{\overset{*}{P}}{}'=-c\frac{\varpi}{E}\bar{e}_2-c\frac{E'}{E^2}\bar{e}_3,$$

$$\bar{\overset{*}{P}}{}''=c\frac{k\varpi}{E}\bar{e}_1+c\frac{2\varpi E'-\varpi'E}{E^2}\bar{e}_2+c\left(2\frac{E'^2}{E^3}-\frac{\varpi^2}{E}-\frac{E''}{E^2}\right)\bar{e}_3.$$

Векторы $\bar{\overset{*}{P}}{}'$ и $\bar{\overset{*}{P}}{}''$ лежат в соприкасающейся плоскости кривой $\overset{*}{\gamma}$.

Вычислим два скалярных произведения $(\bar{P},\bar{\overset{*}{P}}{}')$ и $(\bar{P},\bar{\overset{*}{P}}{}'')$. Опуская обширные промежуточные выкладки, в которых используется (8), получим

$$(\bar{P},\bar{\overset{*}{P}}{}')\equiv 0,\quad (\bar{P},\bar{\overset{*}{P}}{}'')\equiv 0.$$

А это означает [5], что соприкасающаяся плоскость кривой $\overset{*}{\gamma}$ совпадает с касательной плоскостью к поверхности F^*, т.е. образ $\overset{*}{\gamma} = H(\gamma)$ асимптотической γ $(k \neq 0)$ на F будет асимптотической на $F^* = H(F)$.

Рассмотрим отдельно случай, когда асимптотическая на F является прямой. Пусть γ — прямая $(k \equiv 0)$. Присоединим к каждой точке $P(s) \in \gamma$ ортонормированный репер $T=\{P, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, направив $\bar{e}_1$ вдоль прямой γ, а вектор $\bar{e}_3$ — по нормали к поверхности F. Этим самым направление вектора $\bar{e}_2$ будет однозначно определено. Построенный таким образом репер T не будет репером Френе. Для репера T справедливы формулы

$$\bar{P}' = \bar{e}_1, \quad \bar{e}_1' = \bar{0}, \quad \bar{e}_2' = \varpi\, \bar{e}_3, \quad \bar{e}_3' = -\varpi\, \bar{e}_2. \tag{10}$$

Формально они совпадают с результатом подстановки $k \equiv 0$ в (4), (5). (Заметим, что в (10) в силу ограничений (2) обязано выполняться дополнительное условие $\varpi \neq 0$).

Аналогично предыдущему можно установить, что образ $\overset{*}{\gamma} = H(\gamma)$ асимптотической γ $(k \equiv 0)$ на F является асимптотической на поверхности $F^* = H(F)$.

Теорема доказана.

Отметим, что преобразование взаимности H не является проективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мягков В.И. Второе безынтегральное представление комплекса, допускающего H/K-расслоение // Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, Харьков, с.85—90.

2. Мягков В. И. Безынтегральное представление комплекса с четырехкратным бесконечно удаленным инфлекционным центром // Укр. геометр. сб., 1987, вып.30, Харьков, с. 76—81.

3. Мягков В. И., Таранина Е. И. Характеристическое свойство действительных нераспадающихся кривых второго порядка // 1989—16 с. Библиогр. 10 названий, Рукопись депонир. в УКР. НИИНТИ. 19.02.90, № 248—УК90.

4. Мягков В. И. Характеристическое свойство нераспадающихся коник. П'ята міжнародна Наукова конференція. Тези доповідей. Київ, 1996, с. 294.

5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии // Москва, 1956, 420 с.