О ВПИСЫВАНИИ ПРАВИЛЬНОГО N-СИМПЛЕКСА В ОБОБЩЕННЫЙ N-КУБ

О. И. Рудницкий, кандидат физико-математических наук, доцент

Известна задача вписывания правильного n-симплекса α_n в n-куб γ_n в n-мерном евклидовом пространстве (все вершины n-симплекса α_n являются вершинами n-куба γ_n). Эта проблема эквивалентна проблеме существования матрицы Адамара порядка $n+1$ и не имеет полного решения; обзор результатов см. в [1].

В n-мерном унитарном пространстве U^n $(n>4)$ существуют три типа правильных многогранников: вещественный n-симплекс α_n, обобщенный n-куб γ_n^m и взаимный ему обобщенный n-крест β_n^m $(m>1$ — натуральное) [2]; при этом γ_n^2 и β_n^2 — вещественные n-куб и n-крест. Вершины n-симплекса α_n определим $n+1$ векторами (с общим началом) длины $\sqrt{n}$, скалярное произведение любой пары которых равно -1. Координаты m^n вершин обобщенного n-куба γ_n^m можно задать так [2]:

$$\left(\theta^{k_1}, \theta^{k_2}, \ldots, \theta^{k_n}\right) \tag{1}$$

где θ есть первообразный корень степени m из единицы, $k_i = 0, \ldots, m-1$, $i = 1, \ldots, n$.

В. Ф. Игнатенко предложил рассмотреть следующую задачу: *указать все значения m и n, для которых правильный n-симплекс α_n можно вписать в обобщенный n-куб γ_n^m.*

Цель настоящей заметки — привести связь сформулированной задачи с задачей существования обобщенной матрицы Адамара, а также дать ее решение при некоторых значениях m и n.

1. Квадратная матрица $H = H(m,n)$ порядка n, все элементы которой есть корни степени m из единицы, называется обобщенной матрицей Адамара, если $H \cdot H^{CT} = n \cdot E$, где E — единичная матрица [3].

<u>Теорема 1.</u> *Правильный n-симплекс α_n вписываем в обобщенный n-куб γ_n^m при тех и только тех значениях m и n, при которых существует обобщенная матрица Адамара $H(m,n+1)$ порядка $n+1$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству, предложенному Н. А. Григорьевым [4] для вещественного случая $(m=2)$. Действительно, пусть существует обобщенная матрица Адамара $H(m,n+1)$. Ее всегда можно считать приведенной к стандартному виду [3], т.е. к матрице, у которой все элементы первых строки и столбца равны единице. Обозначим через h_{kj} $(k, j = 1, \ldots, n+1)$ элементы матрицы $H(m,n+1)$, а через H' — матрицу, полученную из $H(m,n+1)$ вычеркиванием первого столбца. Строки матрицы H' представимы в виде (1) и, следовательно, являются $n+1$ вершинами n-куба γ_n^m. С другой стороны, для всех $k, l = 1, \ldots, n+1$,

$$\sum_{j=2}^{n+1} h_{kj} \bar{h}_{lj} = \begin{cases} n, & \text{если } k = l, \\ -1, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

т.е. векторы $\overline{OV_k} = (h_{lj})$, $k=1,\ldots,n+1$, $j=2,\ldots,n+1$, задают вершины правильного n-симплекса α_n. Таким образом, α_n вписываем в γ_n^m.

Проведя обратные рассуждения, убедимся в существовании матрицы $H(m,n+1)$, если n-симплекс α_n можно вписать в обобщенный n-куб γ_n^m. Теорема доказана.

2. Известно [3], что при простом m матрица $H(m,n)$ может существовать только для $n=mt$, где t — натуральное. Кроме того, матрица $V=(v_{ij})$, определенная равенством $v_{ij}=\theta^{ij}$ $(i,j=0,\ldots,m-1)$, есть симметричная $H(m,m)$-матрица. Следовательно, для каждого значения n всегда существует значение $m=n+1$, при котором n-симплекс α_n вписываем в обобщенный n-куб γ_n^m.

Рассмотрим случай $n=2$. Имеет место

Теорема 2. *Обобщенная матрица Адамара $H(m,3)$ существует тогда и только тогда, когда $m=3t$, t — натуральное.*

Доказательство. Не нарушая общности, выберем матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta^{k_1} & \theta^{k_2} \\ 1 & \theta^{k_3} & \theta^{k_4} \end{pmatrix},$$

где $\theta^m = 1$, $k_i = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,4$, $k_1 \geq k_2$ [3].

Матрица H является обобщенной матрицей Адамара $H(m,3)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1+\theta^{k_1}+\theta^{k_2} &= 0, \\ 1+\theta^{k_3}+\theta^{k_4} &= 0, \\ 1+\theta^{k_1-k_3}+\theta^{k_2-k_4} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим первое равенство системы (2). Переходя к тригонометрической записи комплексного числа ($\varepsilon^2=-1$), имеем

$$2\cos\frac{\pi(k_1+k_2)}{m}\cos\frac{\pi(k_1-k_2)}{m}+2\varepsilon\sin\frac{\pi(k_1+k_2)}{m}\cos\frac{\pi(k_1-k_2)}{m}=-1,$$

что равносильно системе

$$\sin\frac{\pi(k_1+k_2)}{m}\cos\frac{\pi(k_1-k_2)}{m}=0,$$
$$\cos\frac{\pi(k_1+k_2)}{m}\cos\frac{\pi(k_1-k_2)}{m}=-\frac{1}{2}.$$

Отсюда, $\cos\frac{\pi(k_1-k_2)}{m}\neq 0$, $\sin\frac{\pi(k_1+k_2)}{m}=0$. Поэтому $k_1+k_2=m$ или $2m$. Если $k_1+k_2=2m$, то $k_1=k_2=m$, что невозможно. Пусть $k_1+k_2=m$. Тогда $\cos\pi\cos\frac{\pi(k_1-k_2)}{m}=-\frac{1}{2}$. Значит, $k_1-k_2=\frac{6l\pm 1}{3}m$, $l=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Так как $k_1\geq k_2>0$, то $k_1-k_2=\frac{1}{3}m$. Таким образом, $k_1+k_2=m$, $k_1-k_2=\frac{1}{3}m$. Отсюда, $k_1=\frac{2}{3}m$, $k_2=\frac{1}{3}m$.

Аналогично из второго равенства системы (2), получим $k_3=\frac{1}{3}m$, $k_4=\frac{2}{3}m$ или $k_3=\frac{2}{3}m$, $k_4=\frac{1}{3}m$. При этом второе решение невозможно в силу третьего равенства системы (2). Итак, из системы (2), имеем $k_1=k_3=\frac{2}{3}m$, $k_2=k_4=\frac{1}{3}m$. Поскольку k_i — натуральные, то матрица H является обобщенной матрицей Адамара $H(m,3)$ тогда и только тогда, когда $m=3t$, где t — натуральное. Матрица $H(3t,3)$ всегда может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix},$$

где $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — первообразный корень третьей степени из единицы. Теорема доказана.

Таким образом, правильный треугольник вписываем в γ_2^m только при $m=3t$. Геометрически это осуществимо следующим образом. Выберем из множества m^2 вершин γ_2^m подмножество вида (1) при $k_1+k_2\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$. Таких вершин m, и они определяют многоугольник $\frac{1}{m}\gamma_2^m$, который является правильным m-угольником. Поскольку $m=3t$, в него можно вписать правильный треугольник.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко, Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Пробл. геометр. Итоги науки и техн. - М.: ВИНИТИ АН СССР. - 1984. - Т.16. - С.195-229.

2. G. C. Shephard, Unitary groups generated by reflections // Can. J. Math. — 1953. — V.5. - P.364-383.

3. A. T. Butson, Generalized Hadamard matrices // Proc. Amer. Math. Soc. — 1962.— V.13, N 6. - P. 894-898.

4. Н. А. Григорьев, Вписанные в куб правильные симплексы и матрицы Адамара // Тр. Мат. ин-та АН СССР. - 1980. - Т.152. - С. 87-88.