ПРОСТРАНСТВО ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ДЕФЕКТНЫМИ ЧИСЛАМИ

А. Ю. Поречнов, И. И. Карпенко, кандидат физико-математических, доцент

В последнее время в теории расширений эрмитовых операторов используется подход, основанный на понятии пространств граничных значений (ПГЗ). Для эрмитовых операторов с равными дефектными числами описание ПГЗ получено в работах [1], [2].

В настоящей работе это понятие естественно обобщается на случай эрмитовых операторов с различными дефектными числами. Следует отметить, что предлагаемый подход существенно отличается от предложенных ранее в работах [3], [4].

Общие свойства пространства граничных значений

Пусть A – замкнутый эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, которая не предполагается плотной в H. Не ограничивая общности, можем считать, что $D(A) \vee \Delta(A) = H$, где $\Delta(A)$ – множество значений оператора A.

Обозначим N_λ – дефектное подпространство, соответствующее числу λ $(H = N_\lambda \oplus \Delta(A - \lambda I))$, $n_+ = \dim N_i$, $n_- = \dim N_{-i}$ – дефектные числа и $\varepsilon = \operatorname{sign}(n_+ - n_-)$.

Определение 1 Пятерка $(X, X', \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)$, где X, X' – некоторые гильбертовы пространства, операторы $\Gamma_1, \Gamma_2 \in [N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}, X]$, $\Gamma \in [N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}, X']$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$, называется пространством граничных значений (п.г.з.) эрмитового оператора A, если:

1) для любых $x = x_\lambda + x_{\bar\lambda}$, $y = y_\lambda + y_{\bar\lambda}$ из $N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}$

$$(\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_X - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_X - 2\varepsilon i(\Gamma x, \Gamma y)_{X'} = (\lambda - \bar\lambda)\left[(x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}) - (x_\lambda, y_\lambda)\right], \tag{1}$$

2) для любых $\varphi, \psi \in X$, $\alpha \in X'$ в $N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}$ найдется такой элемент x, что

$$\Gamma_1 x = \varphi,\ \Gamma_2 x = \psi,\ \Gamma x = \alpha. \tag{2}$$

Удобно переписать определение в другом виде. Для этого обозначим $\tilde X = X \oplus X'$. Пусть операторы A_1, A_2 действуют из $N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}$ в X, X' соответственно. Тогда операторы вида $\tilde A = \langle A_1, A_2 \rangle$ действуют из $N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}$ в $\tilde X$ так: $\tilde A x = \langle A_1 x, A_2 x \rangle$.

<u>Определение 2</u> Тройка $\left(\widetilde{X},\widetilde{\Gamma}_1,\widetilde{\Gamma}_2\right)$, где $\widetilde{X}=X\oplus X'$ – некоторое гильбертово пространство, операторы $\widetilde{\Gamma}_1=\langle\Gamma_1,\Gamma\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2=\langle\Gamma_2,\varepsilon i\Gamma\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_1,\widetilde{\Gamma}_2\in\left[N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda},\widetilde{X}\right]$ $(\operatorname{Im}\lambda\neq 0)$, называется пространством граничных значений (п.г.з.) эрмитового оператора A, если:

1) для любых $x=x_\lambda+x_{\bar\lambda}$, $y=y_\lambda+y_{\bar\lambda}$ из $N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}$

$$\left(\widetilde{\Gamma}_1x,\widetilde{\Gamma}_2y\right)_{\widetilde{X}}-\left(\widetilde{\Gamma}_2x,\widetilde{\Gamma}_1y\right)_{\widetilde{X}}=(\lambda-\bar\lambda)\left[\left(x_{\bar\lambda},y_{\bar\lambda}\right)-\left(x_\lambda,y_\lambda\right)\right], \tag{3}$$

2) для любых $\langle\varphi,\alpha\rangle,\langle\psi,\varepsilon i\alpha\rangle\in\widetilde{X}$ в $N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}$ найдется такой элемент x, что

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_1x&=\langle\varphi,\alpha\rangle,\\ \widetilde{\Gamma}_2x&=\langle\psi,\varepsilon i\alpha\rangle.\end{aligned} \tag{4}$$

Легко убедиться, что определения 1 и 2 эквивалентны.

<u>Предложение 1</u> 1) $\ker\widetilde{\Gamma}_1\cap\ker\widetilde{\Gamma}_2=\{0\}$,

2) $N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}=\ker\widetilde{\Gamma}_1\dotplus\ker\Gamma_2=\ker\Gamma_1\dotplus\ker\widetilde{\Gamma}_2$.

□ 1) Пусть $x\in\ker\widetilde{\Gamma}_1\cap\ker\widetilde{\Gamma}_2$, тогда на основании (3) $\forall y\in N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}$ $0=\left(x_{\bar\lambda},y_\lambda\right)-\left(x_\lambda,y_\lambda\right)$. Полагая $y_\lambda=0$, $y_{\bar\lambda}=x_\lambda$, получим $\left\|x_\lambda\right\|^2=0$, следовательно, $x_{\bar\lambda}=0$. Аналогично, полагая $y_\lambda=0$, $y_\lambda=x_\lambda$, получим $\left\|x_\lambda\right\|^2=0$, откуда $x_{\bar\lambda}=0$ и $x=0$.

2) Используя формулу (1), аналогично пункту 1) доказывается, что $\ker\widetilde{\Gamma}_1\cap\ker\Gamma_2=\{0\}$.

Пусть $x=x_\lambda+x_{\bar\lambda}\in N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}$ и $\widetilde{\Gamma}_1x=\langle\varphi,\alpha\rangle$. Для пары $\{\langle\varphi,\alpha\rangle,\langle\psi,\varepsilon i\alpha\rangle\}\subset\widetilde{X}$ найдется $x_1\in N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}$, такой, что $\widetilde{\Gamma}_1x_1=\langle\varphi,\alpha\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2x_1=\langle\psi,\varepsilon i\alpha\rangle$, т.е. $x_1\in\ker\Gamma_2$.

Обозначим $x_2=x-x_1$. $\widetilde{\Gamma}_1x_2=\widetilde{\Gamma}_1x-\widetilde{\Gamma}_1x_1=\langle 0,0\rangle$, т.е. $x_2\in\ker\widetilde{\Gamma}_1$.

Аналогично доказывается, что $N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}=\ker\Gamma_1\dotplus\ker\widetilde{\Gamma}_2$. ■

<u>Предложение 2</u> $\dim\ker\widetilde{\Gamma}_k=\dim X$ $\left(k=\overline{1,2}\right)$.

□ Пусть $\{\varphi_k\}_1^r$ – линейно независимая система векторов из X. Для каждой пары $\{\langle\varphi_k,0\rangle,\langle 0,0\rangle\}$ найдется такой вектор $x_k\in N_\lambda\dotplus N_{\bar\lambda}$, что $\widetilde{\Gamma}_1x_k=\langle\varphi_k,0\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2x_k=\langle 0,0\rangle$.

Т.е. $x_k \in \ker\widetilde{\Gamma}_2$. Предположим, что $\sum_{k=1}^{r}\alpha_k x_k = 0$, тогда, применяя к этому равенству оператор Γ_1, получим $\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\varphi_k = 0$, откуда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ и, следовательно, $\{x_k\}_1^r$ – линейно независима. Таким образом, $\dim\ker\widetilde{\Gamma}_2 \geq \dim X$.

Пусть $\{x_k\}_1^s$ – линейно независимая система векторов из $\ker\widetilde{\Gamma}_2$, т.е. $\widetilde{\Gamma}_1 x_k = \langle\psi_k, 0\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 x_k = \langle 0,0\rangle$. Предположим $\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\psi_k = 0$, но $\sum_{k=1}^{s}\alpha_k\psi_k = \Gamma_1\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_k x_k\right)$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{s}\alpha_k x_k \in \ker\Gamma_1$ и, в силу предложения 1, $\sum_{k=1}^{s}\alpha_k x_k = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$. Поэтому $\{\psi_k\}_1^s$ – линейно независима, и $\dim\ker\widetilde{\Gamma}_2 \leq \dim X$. Это доказывает, что $\dim\ker\widetilde{\Gamma}_2 = \dim X$.

Аналогично доказывается, что $\dim\ker\widetilde{\Gamma}_1 = \dim X$. ■

Предложение 3 $\dim\ker\Gamma_k = \dim\widetilde{X}$ $\left(k = \overline{1,2}\right)$.

Пусть $\{\langle\beta_k, \alpha_k\rangle\}_1^r$ – линейно независимая система векторов из $\widetilde{X}$. Для каждой пары $\{\langle\beta_k, \alpha_k\rangle, \langle 0, \varepsilon i\alpha_k\rangle\}$ найдется вектор $x_k \in N_\lambda \dotplus N_{\bar\lambda}$: $\widetilde{\Gamma}_1 x_k = \langle\beta_k, \alpha_k\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 x_k = \langle 0, \varepsilon i\alpha_k\rangle$.

Т.е. $x_k \in \ker\Gamma_2$. Предположим, что $\sum_{k=1}^{r}p_k x_k = 0$, тогда, применяя к этому равенству оператор $\widetilde{\Gamma}_1$, получим $\sum_{k=1}^{r}p_k\langle\beta_k, \alpha_k\rangle = \langle 0,0\rangle$, откуда $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 0$. Следовательно, $\{x_k\}_1^r$ – линейно независима и $\dim\ker\Gamma_2 \geq \dim\widetilde{X}$.

Пусть $\{x_k\}_1^s$ – линейно независимая система векторов из $\ker\Gamma_2$, $\widetilde{\Gamma}_1 x_k = \langle\beta_k, \alpha_k\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 x_k = \langle 0, \varepsilon i\alpha_k\rangle$. Предположим $\sum_{k=1}^{r}p_k\langle\beta_k, \alpha_k\rangle = \langle 0,0\rangle$, тогда $\widetilde{\Gamma}_1\left(\sum_{k=1}^{s}p_k x_k\right) = \langle 0,0\rangle$ и

$\sum\limits_{k=1}^{s} p_k x_k \in \ker\widetilde{\Gamma}_1$. В силу предложения 1, $\sum\limits_{k=1}^{s} p_k x_k = 0$, следовательно, $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 0$ и $\left\{\left\langle \beta_k, \alpha_k \right\rangle\right\}_1^s$ – линейно независима. Итак, $\dim\ker\Gamma_2 \le \dim\widetilde{X}$ и, поэтому, $\dim\ker\Gamma_2 = \dim\widetilde{X}$.

Аналогично доказывается, что $\dim\ker\Gamma_1 = \dim\widetilde{X}$.

■

Возможны два случая: $\dim N_\lambda \ge \dim N_{\bar\lambda}$ $(\varepsilon\,\mathrm{Im}\,\lambda \ge 0)$ и $\dim N_\lambda \le \dim N_{\bar\lambda}$ $(\varepsilon\,\mathrm{Im}\,\lambda \le 0)$.

<u>Предложение 4</u>

Если $\dim N_\lambda \ge \dim N_{\bar\lambda}$, то $\ker\Gamma_k = (I + \Phi_k)N_\lambda$, $\Delta(\Phi_k) = N_{\bar\lambda}$, Φ_k – сжатие, $-1 \notin \sigma_p(\Phi_k)$, $\ker\widetilde{\Gamma}_k = (I + \widetilde{\Phi}_k)D(\widetilde{\Phi}_k)$, $\Delta(\widetilde{\Phi}_k) = N_\lambda$, $\widetilde{\Phi}_k$ – изометический оператор, $-1 \notin \sigma_p(\widetilde{\Phi}_k)$, $N_\lambda = D(\widetilde{\Phi}_k) \oplus \ker\Phi_k$, если $\dim N_\lambda \le \dim N_{\bar\lambda}$, то $\ker\Gamma_k = (I + \Phi_k)N_{\bar\lambda}$, $\Delta(\Phi_k) = N_\lambda$, Φ_k – сжатие, $-1 \notin \sigma_p(\Phi_k)$, $\ker\widetilde{\Gamma}_k = (I + \widetilde{\Phi}_k)D(\widetilde{\Phi}_k)$, $\Delta(\widetilde{\Phi}_k) = N_\lambda$, $\widetilde{\Phi}_k$ – изометический оператор, $-1 \notin \sigma_p(\widetilde{\Phi}_k)$, $N_{\bar\lambda} = D(\widetilde{\Phi}_k) \oplus \ker\Phi_k$, $(k = \overline{1,2})$.

Рассмотрим случай $\dim N_\lambda \le \dim N_{\bar\lambda}$. Пусть $x \in \ker\Gamma_2$, $x = x_\lambda + x_{\bar\lambda}$. Имеет место равенство $(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x)_X - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 x)_X - 2\varepsilon i(\Gamma x, \Gamma x)_X = (\lambda - \bar\lambda)\left[(x_{\bar\lambda}, x_{\bar\lambda}) - (x_\lambda, x_\lambda)\right]$, или $-2\varepsilon i\|\Gamma x\|_X^2 = 2(\mathrm{Im}\,\lambda)i\left[\|x_{\bar\lambda}\|^2 - \|x_\lambda\|^2\right]$ (5). Т.к. ε и $\mathrm{Im}\,\lambda$ разных знаков, то из (5) следует $\|x_{\bar\lambda}\| \ge \|x_\lambda\|$ (6).

Компонента x_λ однозначно определяется компонентой $x_{\bar\lambda}$. Действительно, если $x' = x'_\lambda + x_{\bar\lambda} \in \ker\Gamma_2$, то $(x - x') = 0 + (x_\lambda - x'_\lambda) \in \ker\Gamma_2$, из (6) следует $\|0\| \ge \|x_\lambda - x'_\lambda\|$, откуда $x_\lambda = x'_\lambda$.

Т.о. на множестве $x_{\bar\lambda}$ таких, что $x_\lambda + x_{\bar\lambda} \in \ker\Gamma_2$ можно определить оператор Φ_2: $\Phi_2 x_{\bar\lambda} = x_\lambda$. Причем $\|\Phi_2 x_{\bar\lambda}\| \le \|x_{\bar\lambda}\|$ и $-1 \notin \sigma_p(\Phi_2)$.

Далее, допустим $\overline{D(\Phi_2)} \neq N_{\bar\lambda}$. Тогда $\exists y_{\bar\lambda} \neq 0$: $\left(y_{\bar\lambda}, x_{\bar\lambda}\right) = 0 \quad \forall x_{\bar\lambda} \in D(\Phi_2)$. Пусть $\widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar\lambda} = \langle \varphi, \varepsilon i\alpha \rangle$. Для пары $\{\langle 0,(-\alpha)\rangle, \langle \varphi, \varepsilon i\alpha\rangle\}$ $\exists x \in N_\lambda \dot{+} N_{\bar\lambda}$: $\widetilde{\Gamma}_1 x = \langle \varphi, \varepsilon i\alpha\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 x = \langle 0,(-\alpha)\rangle$ (т.е. $x \in \ker \Gamma_2$ и $x = x_{\bar\lambda} + \Phi_2 x_{\bar\lambda}$). В этом случае из равенства:

$\left(\widetilde{\Gamma}_1 x, \widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar\lambda}\right) - \left(\widetilde{\Gamma}_2 x, \widetilde{\Gamma}_1 y_{\bar\lambda}\right) = \left(\lambda - \bar\lambda\right)\left(x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}\right)$ получаем: $\|\varphi\|^2 + 2\varepsilon^2\|\alpha\|^2 = 0$ и $\varphi = \alpha = 0$. Тогда

$y_{\bar\lambda} \in \ker \Gamma_2$ и $y_{\bar\lambda} = z_{\bar\lambda} + \Phi_2 z_{\bar\lambda}$, но в этом случае $\Phi_2 z_\lambda = 0$ и $z_\lambda = 0$. Таким образом, $y_{\bar\lambda} = 0$, что противоречит предположению $y_{\bar\lambda} \neq 0$. Следовательно, $\overline{D(\Phi_2)} = N_{\bar\lambda}$.

Докажем, что $\overline{D(\Phi_2)} = D(\Phi_2)$. Пусть $x_{\bar\lambda} \in \overline{D(\Phi_2)} \Rightarrow x_\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x_\lambda^{(n)}$, $x_{\bar\lambda}^{(n)} \in D(\Phi_2)$. Рассмотрим вектор $x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{\bar\lambda}^{(n)} + \Phi_2 x_{\bar\lambda}^{(n)}\right) = x_{\bar\lambda} + x_\lambda$, и докажем, что $x \in \ker \Gamma_2$. Действительно, $\forall y \in N_\lambda \dot{+} N_{\bar\lambda}$, $\quad y = y_\lambda + y_{\bar\lambda} \quad \left(\widetilde{\Gamma}_1 x, \widetilde{\Gamma}_2 y\right) - \left(\widetilde{\Gamma}_2 x, \widetilde{\Gamma}_1 y\right) = \left(\lambda - \bar\lambda\right)\left[\left(x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}\right) - \left(x_\lambda, y_\lambda\right)\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(x_{\bar\lambda}^{(n)}, y_{\bar\lambda}\right) - \left(\Phi_2 x_{\bar\lambda}^{(n)}, y_\lambda\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\widetilde{\Gamma}_1\left(x_\lambda^{(n)} + \Phi_2 x_\lambda^{(n)}\right), \widetilde{\Gamma}_2 y\right) - \left(\widetilde{\Gamma}_2\left(x_\lambda^{(n)} + \Phi_2 x_\lambda^{(n)}\right), \widetilde{\Gamma}_1 y\right)\right] \quad (7).$$

Выберем y так, чтобы $\widetilde{\Gamma}_1 y = \langle \Gamma_2 x, 0\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 y = \langle 0, 0\rangle$. Тогда из (7) следует $\|\Gamma_2 x\|^2 = 0$ и $\Gamma_2 x = 0$. Тогда $x_\lambda \in D(\Phi_2)$ и $\overline{D(\Phi_2)} = D(\Phi_2) = N_\lambda$.

Аналогично доказывается, что $\Delta(\Phi_2) = N_\lambda$

Предположим $x \in \ker \widetilde{\Gamma}_2$, тогда в выражении (5) левая часть равна 0, поэтому $\left\|x_{\bar\lambda}\right\| = \left\|x_\lambda\right\|$ и, следовательно, $\widetilde{\Phi}_2$ – изометрический оператор

Аналогично приведенному выше, доказывается, что

$$\overline{D(\widetilde{\Phi}_2)} = D(\widetilde{\Phi}_2),\ \Delta(\widetilde{\Phi}_2) = N_\lambda,\ -1 \notin \sigma_p(\widetilde{\Phi}_2).$$

Теперь пусть $y_{\bar\lambda} \perp D(\widetilde{\Phi}_2)$, $\widetilde{\Gamma}_1 y_{\bar\lambda} = \langle \psi, \alpha\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar\lambda} = \langle \varphi, \varepsilon i\alpha\rangle$. Для пары $\{\langle \varphi, 0\rangle, \langle 0,0\rangle\}$

$\exists x$: $\widetilde{\Gamma}_1 x = \langle \varphi, 0\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 x = \langle 0, 0\rangle$, т.е. $x \in \ker \widetilde{\Gamma}_2$ и $x = x_{\bar\lambda} + \widetilde{\Phi}_2 x_{\bar\lambda}$. Из равенства $\left(\widetilde{\Gamma}_1 x, \widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar\lambda}\right) - \left(\widetilde{\Gamma}_2 x, \widetilde{\Gamma}_1 y_{\bar\lambda}\right) = \left(\lambda - \bar\lambda\right)\left(x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}\right)$ следует $\|\varphi\|^2 = 0$ и $\varphi = 0$, а значит $y_{\bar\lambda} \in \ker \Phi_2$.

Если $y_{\lambda} \in \ker \Phi_2$, $\tilde{\Gamma}_1 y_{\bar{\lambda}} = \langle \psi, \alpha \rangle$, $\tilde{\Gamma}_2 y_{\bar{\lambda}} = \langle 0, \varepsilon i \alpha \rangle$, то $\forall x \in \ker \tilde{\Gamma}_2$, $x = x_{\bar{\lambda}} + \tilde{\Phi}_2 x_{\lambda}$, из того же равенства следует $(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}) = 0$. Т.о. $y_{\bar{\lambda}} \perp D(\tilde{\Phi}_2)$. Т.к. $\overline{D(\tilde{\Phi}_2)} = D(\tilde{\Phi}_2)$, то $N_{\bar{\lambda}} = D(\tilde{\Phi}_2) \oplus \ker \Phi_2$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для Φ_1, $\tilde{\Phi}_1$, $\ker \Gamma_1$, $\ker \tilde{\Gamma}_1$, и для случая $\dim N_{\lambda} \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$.

■

<u>Предложение 5</u>

Если $\dim N_{\lambda} \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$, то $N_{\lambda} \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker \tilde{\Gamma}_k \dotplus N_{\lambda} = \ker \Gamma_k \dotplus N_{\bar{\lambda}}$,

если $\dim N_{\lambda} \leq \dim N_{\bar{\lambda}}$, то $N_{\lambda} \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker \tilde{\Gamma}_k \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker \Gamma_k \dotplus N_{\lambda}$,

$(k = \overline{1,2})$.

Пусть $\dim N_{\lambda} \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$, $x \in \ker \tilde{\Gamma}_1 \cap N_{\lambda}$. Тогда $x = x_{\bar{\lambda}} + \tilde{\Phi}_1 x_{\lambda}$, причем $\tilde{\Phi}_1 x_{\lambda} = 0$.

Следовательно, $x_{\bar{\lambda}} = 0$ и $x = 0$. Т.о. $\ker \tilde{\Gamma}_1$ и N_{λ} – линейно независимы. Пусть теперь $x = x_{\lambda} + x_{\bar{\lambda}} \in N_{\lambda} \dotplus N_{\bar{\lambda}}$. Тогда $x = x_{\lambda} - \tilde{\Phi}_1^{-1} x_{\bar{\lambda}} + \tilde{\Phi}_1^{-1} x_{\bar{\lambda}} + x_{\bar{\lambda}} = (x_{\lambda} - z_{\lambda}) + (z_{\lambda} + \tilde{\Phi}_1 z_{\lambda})$, где x_{λ}, $z_{\lambda} \in N_{\lambda}$, а $z_{\lambda} + \tilde{\Phi}_1 z_{\lambda} \in \ker \tilde{\Gamma}_1$. Т.о. $N_{\lambda} \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker \tilde{\Gamma}_1 \dotplus N_{\lambda}$.

Аналогично доказываются остальные случаи.

■

<u>Предложение 6</u>

Если $\dim N_{\lambda} \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$, то $\dim \tilde{X} = \dim N_{\lambda}$, $\dim X = \dim N_{\bar{\lambda}}$, $\dim X' = \dim N_{\lambda} - \dim N_{\bar{\lambda}}$,

если $\dim N_{\lambda} \leq \dim N_{\bar{\lambda}}$, то $\dim \tilde{X} = \dim N_{\bar{\lambda}}$, $\dim X = \dim N_{\bar{\lambda}}$, $\dim X' = \dim N_{\lambda} - \dim N_{\bar{\lambda}}$.

◁ Пусть $\dim N_{\lambda} \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$. Система векторов $\left\{x_{\lambda}^{(k)}\right\}_1^r$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система векторов $\left\{x_{\lambda}^{(k)} + \Phi_1 x_{\lambda}^{(k)}\right\} \subset \ker \Gamma_1$. Поэтому $\dim N_{\lambda} = \dim \ker \Gamma_1$, что согласно предложению 3 равно $\dim \tilde{X}$.

Т.к. $\tilde{\Phi}_1$ изометрический, то любой $x_{\bar{\lambda}}$ имеет свой единственный прообраз x_{λ}: $\tilde{\Phi}_1 x_{\lambda} = x_{\bar{\lambda}}$. Поэтому система векторов $\left\{x_{\bar{\lambda}}^{(k)}\right\}_1^s$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система векторов $\left\{x_{\lambda}^{(k)} + \tilde{\Phi}_1 x_{\lambda}^{(k)}\right\} \subset \ker \tilde{\Gamma}_1$, следовательно,

$\dim N_{\bar\lambda} = \dim \ker \tilde\Gamma_1$, что согласно предложению 2 равно $\dim X$.

Аналогичны рассуждения в случае $\dim N_\lambda \le \dim N_{\bar\lambda}$.

■

Полученные свойства ПГЗ позволяют ввести понятие функции Вейля эрмитова оператора, исследовать ее свойства, а также описать некоторые свойства регулярных расширений в терминах абстрактных граничных значений.

В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенные выше теоретические понятия.

Рассмотрим в пространстве $H = L_2[0,+\infty)$ симметрический оператор $(Ax)(t) = ix'''(t)$ с областью опрделения $D(A) = \{x \in H : x(0) = x'(0) = x''(0) = 0\}$.

$N_\lambda = \ker(A^* - \bar\lambda I)$. Пусть $\operatorname{Im}\lambda > 0$, тогда $x_{\bar\lambda}(t) = c_0 e^{\mu_0 t}$, $x_\lambda(t) = c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t}$, где μ_0, μ_1, μ_2 – корни уравнения $\mu^3 = -i\bar\lambda$. Т.о. $n_+ = 1$, $n_- = 2$, $\varepsilon = -1$.

$$(\lambda - \bar\lambda)\left[(x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}) - (x_\lambda, y_\lambda)\right] = (A^*x, y) - (x, A^*y) = i\left(x'(0)\overline{y'(0)} - x''(0)\overline{y(0)} - x(0)\overline{y''(0)}\right).$$

Выберем $\Gamma_1 x = x''(0)$, $\Gamma_2 x = ix(0)$, $\Gamma x = \frac{1}{\sqrt 2}x'(0)$. Тогда $\tilde\Gamma_1 x = \left\langle x''(0), \frac{1}{\sqrt 2}x'(0)\right\rangle$, $\tilde\Gamma_2 x = \left\langle ix(0), -\frac{1}{\sqrt 2}x'(0)\right\rangle$.

$\ker\Gamma_1$ состоит из таких $x(t)$, что $x''(0) = 0$ ($\mu_0^2 c_0 + \bar\mu_1^2 c_1 + \bar\mu_2^2 c_2 = 0$), а $\ker\Gamma_2$ из таких, что $x(0) = 0$ ($c_0 + c_1 + c_2 = 0$). Т.о. $\dim\ker\Gamma_1 = \dim\ker\Gamma_2 = 2 = n_+$.

$\ker\tilde\Gamma_1$ состоит из таких $x(t)$, что $\begin{cases} x'(0) = 0, \\ x''(0) = 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} \mu_0 c_0 - \bar\mu_1 c_1 - \bar\mu_2 c_2 = 0, \\ \mu_0^2 c_0 + \bar\mu_1^2 c_1 + \bar\mu_2^2 c_2 = 0. \end{cases}$, а $\ker\tilde\Gamma_2$ из таких, что $\begin{cases} x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 0 \\ \mu_0 c_0 - \bar\mu_1 c_1 - \bar\mu_2 c_2 = 0. \end{cases}$. Т.о. $\dim\ker\tilde\Gamma_1 = \dim\ker\tilde\Gamma_2 = 1 = n_-$.

$$\Phi_1\left(c_1 e^{-\bar\mu_1 t} + c_2 e^{-\bar\mu_2 t}\right) = -\frac{\bar\mu_1^2 c_1 + \bar\mu_2^2 c_2}{\mu_0^2} e^{\mu_0 t},\quad \Phi_2\left(c_1 e^{-\mu_1 t} + c_2 e^{-\mu_2 t}\right) = -(c_1 + c_2)e^{\mu_0 t}.$$

$$\tilde\Phi_1\left(c_1\left(e^{-\mu_1 t} + \alpha e^{-\bar\mu_2 t}\right)\right) = -c_1\frac{\bar\mu_1^2 + \alpha\bar\mu_2^2}{\mu_0^2} e^{\mu_0 t},\quad \tilde\Phi_2\left(c_1\left(e^{-\mu_1 t} + \beta e^{-\bar\mu_2 t}\right)\right) = -c_1(1+\beta)e^{\mu_0 t},$$ где

$$\alpha = -\frac{\bar\mu_1(\bar\mu_1 + \mu_0)}{\bar\mu_2(\bar\mu_2 + \mu_0)},\quad \beta = -\frac{\bar\mu_1 + \mu_0}{\bar\mu_2 + \mu_0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Деркач, М. М. Маламуд. О характеристических функциях расширений эрмитова оператора. (1984), Макеевка, 45с.

2. А. В. Кужель, И. И. Карпенко. Пространства граничных значений эрмитовых операторов. (1989), Симф.: СГУ, 8с.

3. С. А. Кужель. О правильных расширениях эрмитовых операторов.– Функциональный анализ. Линейные пространства: Межвузовский сборник научных трудов. (1990), Ульяновск, с.91-100.

4. О. Г. Сторож. Методы теории расширений и дифференциально–граничные операторы.– Дисс-я... докт. физ.-мат. наук. (1995), Львов, 277с.