О БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТАХ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ ГРУПП F_4 И B_N

А. А. Кобец

Пусть G есть конечная группа, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей в вещественном пространстве E^n. Особое многообразие I состоит из действительных векторов x, таких что $\prod_{i=1}^{n} I_{n_i}^{G}(x)=0$; здесь $I_{n_i}^{G}\left(n_i=\deg I_{n_i}^{G}, i=\overline{1,n}\right)$ — базисные инварианты Флатто – Винер группы G [1], вектор $x=(x_i)$. Многообразие M для групп $G=I_2^{\prime}, A_3$ приведено в работе [1]. Найдём здесь подмногообразие $\hat{I}$ для групп F_4 и $\hat{A}_n$.

1°. Пусть в пространстве A^4 задана прямоугольная система координат $Ox_i\left(i=\overline{1,4}\right)$. Если к вершинам 4 – куба $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$ присоединить точки $(\pm2,0,0,0)$, $(0,\pm2,0,0)$, $(0,0,\pm2,0)$, $(0,0,0,\pm2)$, то получим все вершины правильного 24-гранника с группой симметрий F_4. Его плоскости симметрии определяются уравнениями

$$x_i=0, x_i \pm x_j=0\left(i,j=\overline{1,4}; i<j\right),$$

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4=0.$$

Найдём базисный инвариант Флатто-Винер шестой степени группы F_4. Рассмотрим $\hat{O}_6=aI_2^3+bB_6$, где $I_2=I_2^{F_4}=\sum_{i=1}^{4}x_i^2, B_6=\sum_{i=1}^{4}x_i^6+5\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}x_i^4x_j^2$ (см. [2]). Уравнение $I_2(\partial)\hat{O}_6=0$, где $I_2(\partial)$ — оператор Лапласа, даёт $b=-\frac{5}{4}a$, тогда

$$I_6^{F_4}=\sum_{i=1}^{4}x_i^6-5\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}x_i^4x_j^2+30\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{4}x_i^2x_j^2x_k^2.$$

Отобразим пространство E^4 в пространство $R^4(y_i)$ по формулам $y_i=x_i^2, i=\overline{1,4}$. Это преобразование подробно изучено, например, в работе [3]. Инварианту $I_6^{F_4}$ в R^4 соответствует форма $I_6^{F_4}(y)$, где $y=(y_i)$. Уравнение $I_6^{F_4}=0$ задает конус C_3. Плоскость с уравнением $y_4=t, t\neq0$, пересекает C_3 по гладкой двумерной кубической поверхности — направляющей конуса C_3. Плоскость $y_3=c, c\neq0$, пересекает указанную направляющую по кубике

$$y_1^3+y_2^3-5\left(y_1^2y_2+y_1y_2^2\right)-5(c+t)\left(y_1^2-6y_1y_2+y_2^2\right)-$$
$$-5\left(c^2-6ct+t^2\right)\left(y_1+y_2\right)+c^3+t^3-5\left(c^2t+ct^2\right)=0. \qquad (1)$$

Выясним тип этой кривой. Для этого найдем число её бесконечно удалённых точек. Из уравнения $y_1^3-5\left(y_1^2y_2+y_1y_2^2\right)+y_2^3=0$ находим, что таких точек три, все они — вещественные и различные. Это значит, что кривая (1) является раскинутой гиперболой [4].

С помощью аффинного преобразования $\left(y_1,y_2\right)$ а $\left(x+\frac{1}{4}y+\frac{5}{2}(c+t),x-\frac{1}{4}y+\frac{5}{2}(c+t)\right)$ уравнение (1) приведём к виду $xy^2=8x^3+40(c+t)x^2+20\left(3t^2+3c^2+2ct\right)+$ $+24\left(c^3+t^3-5c^2t-5ct^2\right)$. Вспомогательное уравнение

$$8x^4+40(c+t)x^3+20\left(3c^2+3t^2+2ct\right)x^2+24\left(c^3+t^3-5c^2t-5ct^2\right)=0$$

имеет четыре различных вещественных корня. Значит, кривая (1) состоит из двух гиперболических ветвей и одной прямолинейной (рис. 1).

В случае, когда одно из чисел c,t равно нулю, имеем кривую того же типа. Если $c=t=0$, то кривая (1) распадается на три прямые.

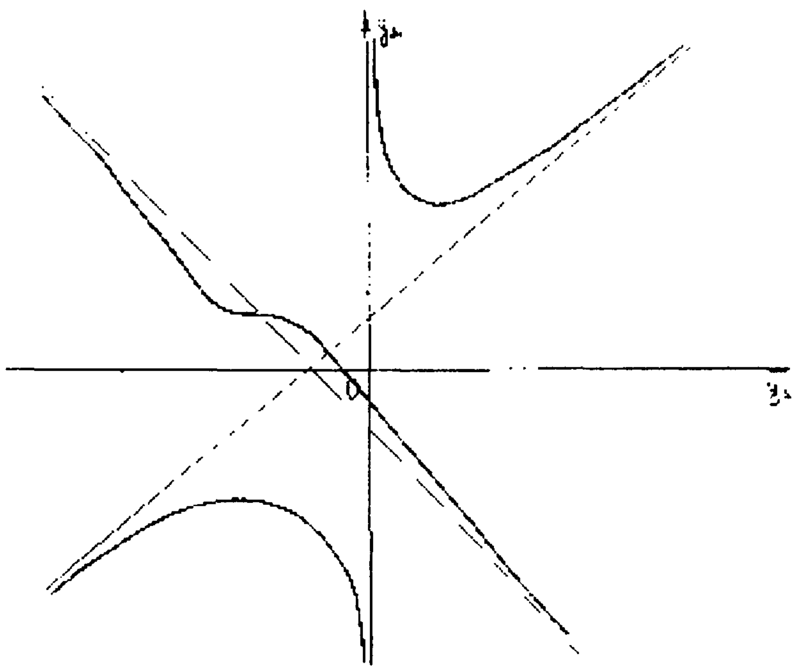

Рис. 1

Таким образом, справедлива

Теорема 1. В пространстве $R^4(y_i), i=\overline{1,4}$, особое подмногообразие, определяемое инвариантом $I_6^{F_4}$, состоит из направляющих векторов вещественных полупрямых, которые лежат при $y_i \geq 0$ на конусе C_3, не имеющем особых точек вне его вершины. 2 — плоскость с уравнениями $y_3 = c, y_4 = t$ пересекает конус C_3 по раскинутой гиперболе, которая при $c = t = 0$ вырождается в три прямые.

2°. Пусть плоскости симметрии $n-$ куба в пространстве E^n определяются уравнениями

$$x_i = 0, i = \overline{1,n},$$

$$x_i \pm x_j = 0\left(i, j = \overline{1,n}, i < j\right).$$

Тогда инварианты группы B_n имеют вид (см. [2]):

$$A_{2j} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2j}, j = \overline{1,n}$$

Найдём базисный инвариант Флатто-Винер шестой степени при $I_2 = I_2^{B_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Базисный инвариант четвёртой степени находится среди форм $\hat{O}_4 = aA_2^2 + bA_4$. Из уравнения $I_2(\partial)\hat{O}_4 = 0$ имеем $a(n+2) + 3b = 0$. Поэтому

$$I_4^{B_n} = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 6\sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 x_j^2.$$

Инвариант шестой степени запишем в виде $\hat{O}_6 = aA_2^3 + bA_2A_4 + cA_6$. Система дифференциальных уравнений $I_2(\partial)\hat{O}_6 = 0, I_4(\partial)\hat{O}_6 = 0$ приводит к линейным уравнениям $3a(n+4) + b(n+14) + 15c = 0,\ a(n+4) + 2b = 0,\ b(n+8) + 15c = 0$.. Отсюда $a = -\dfrac{2b}{n+4}, c = -\dfrac{b(n+8)}{15}$. Следовательно, инвариант

$$I_6^{B_n} = (n-1)(n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i^6 - 15(n-2)\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^4 x_j^2 + 180\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} x_i^2 x_j^2 x_k^2. \tag{2}$$

Как и п. 1°, отображение пространства E^n в пространство $R^n(y_i)$ зададим формулами $y_i = x_i^2, i = \overline{1,n}$. В R^n получим форму $I_6^{B_n}(y)$.

2.1. Рассмотрим случай $n = 3$. Согласно (2), инвариант

$$I_6^{B_3} = 2\sum_{i=1}^{3} x_i^6 - 15\sum_{i,j=1}^{3} x_i^4 x_j^2 + 180\sum_{i,j,k=1}^{3} x_i^2 x_j^2 x_k^2.$$

Пересекая конус K_3 с уравнением $I_6^{B_3}=0$ плоскостью $y_3=c$, получим кривую третьего порядка

$$2(y_1^3+y_2^3)-15\left(y_1^2y_2+y_1y_2^2\right)-15c\left(y_1^2-12y_1y_2+y_2^2\right)-15c^2\left(y_1+y_2\right)+2c^3=0. \qquad (3)$$

Тип этой кривой определим по числу различных точек на бесконечности. Из уравнения $2(y_1^3+y_2^3)-15\left(y_1^2y_2+y_1y_2^2\right)=0$ следует, что таких точек три, они являются вещественными и различными. Это означает, что кривая (3) — тоже раскинутая гипербола. Подвергнем кубику (3) аффинному преобразованию $\left(y_1,y_2\right)$ а $\left(x+\sqrt{42}+5c, x-\sqrt{42}+5c\right)$, тогда (3) примет вид $xy^2=26x^3+240cx^2+480c^2x-352c^3$. Вспомогательное уравнение $26x^4+240cx^3+480c^2x^2-352c^3x=0$ имеет два различных вещественных и два комплексных корня. Вид кривой показан на рис. 2. При $c=0$ получаем кубику, которая распадается на три прямые.

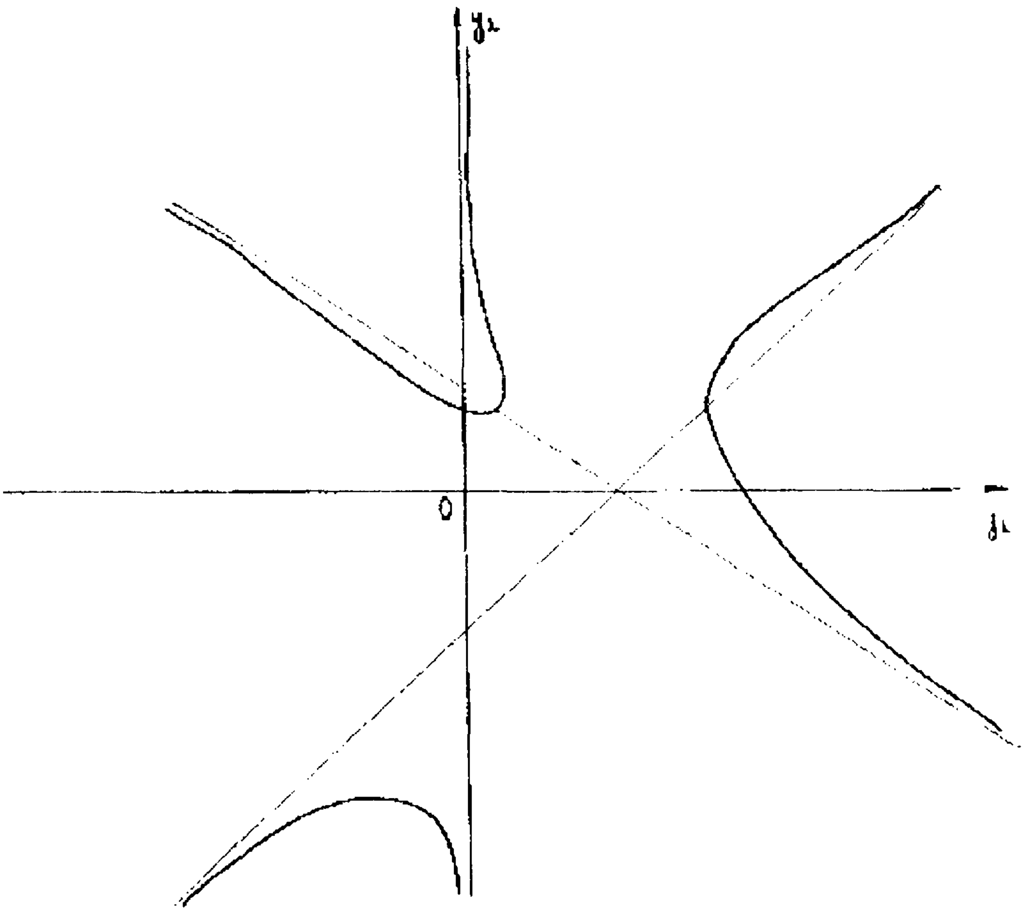

Рис. 2

Отметим, что K_3 является конусом, направляющая которого есть раскинутая гипербола. Такой конус называется раскинутым гиперболическим конусом.

Итак, доказана

Лемма. Особое подмногообразие, определяемое инвариантом $I_6(x)$, в пространстве R^3 состоит из направляющих векторов вещественных полупрямых первого октанта, расположенных на раскинутом гиперболическом конусе K_3. Плоскость $y_3 = 0$ пересекает его по трем прямым.

2.2. В случае $n > 3$ конус L_3 с уравнением $I_6^{B_n}(y) = 0$ пересечем плоскостью $y_n = c_n, c_n \neq 0$. Получим гладкую кубическую поверхность — $(n-1)$ – мерную направляющую L_3.

Если конус L_3 пересечь 2 – плоскостью с уравнениями $y_i = c_i, i = \overline{3,n}$, то получим кубику

$$\begin{gathered}(n-2)(n-2)\left(y_1^3 + y_2^3\right) - 15(n-2)\left(y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2\right) - \\ - 15\left((n-2)\left(y_1^2 + y_2^2\right) - 12 y_1 y_2\right)\sum_{i=3}^{n} c_i - \\ - 15\left((n-2)\sum_{i=3}^{n} c_i^2 - 12\sum_{\substack{i,j=3 \\ i \neq j}}^{n} c_i c_j\right)(y_1 + y_2) + (n-1)(n-2)\sum_{i=3}^{n} c_i^3 - \\ - 15(n-2)\sum_{\substack{i,j=3 \\ i \neq j}}^{n} c_i^2 c_j + 180 \sum_{\substack{i,j,k=3 \\ i \neq j \neq k}}^{n} c_i c_j c_k = 0.\end{gathered} \qquad (4)$$

Для определения типа этой кривой найдем число ее бесконечно удаленных точек. Решив уравнение $(n-1)(n-2)\left(y_1^3 + y_2^3\right) - 15(n-2)\left(y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2\right) = 0$, получим, что эта кубика имеет три различные вещественные точки на бесконечности. Поэтому кривая (4) относится к раскинутым гиперболам.

Если $\sum_{i=3}^{n} c_i^2 > 0$, то также имеем раскинутую гиперболу. При $\sum_{i=3}^{n} c_i^2 = 0$ получаем кубику, которая распадается на три прямые.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. В пространстве $R^n(y_i), i = \overline{1,n}$, особое подмногообразие, определяемое инвариантом $I_n^{B_n}$, состоит из направляющих векторов вещественных полупрямых, которые лежат при $y_i \geq 0$ на конусе L_3, не имеющем особых точек вне его вершины. 2 – плоскость с уравнениями $y_i = c_i, i = \overline{3,n}$, пересекает L_3 по раскинутой гиперболе, которая при $c_i = 0, i = \overline{3,n}$, вырождается в три прямые.

Теоремы 1 и 2 показывают, что конусы C_3 и L_3 образованы семействами раскинутых гипербол. Лемма выделяет случай, когда раскинутая гипербола является направляющей конуса K_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flatto L.Invariants of finite reflection groups // Enseign math.,(1978), v. 24, № 3-4, p. 234-292.

2. Игнатенко В. Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Пробл. геометрии (1980), т. 11, с. 203-240.

3. Чуб А. Т. О некоторых кривых на поверхностях второго порядка // Изв. Крым. пед. ин-та (1961) т. 35, с. 56-71.

4. Савелов А. А. Плоские кривые // М. : Физматгиз, (1960). — 296 с.