О МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Анашкин О. В., кандидат физ.-мат. наук, доцент
Евстигнеева Е. Г., аспирант

1. Введение. Целью настоящей статьи является изложение нового подхода в обосновании метода усреднения для весьма общего класса разностных уравнений с малым параметром ε. Метод усреднения [1] заключается в замене исходного уравнения так называемым усредненным. Усредненное уравнение оказывается обычно значительно проще исходного и свойства его решений удается исследовать достаточно полно. В основе метода усреднения лежит принцип усреднения, представляющий собой теорему о достаточных условиях, гарантирующих близость решений исходного и усредненного уравнений с одинаковыми начальными данными на асимптотически большом промежутке времени порядка ε^{-1}, при всех достаточно малых значениях ε.

Вопрос обоснования метода усреднения для разностных уравнений рассматривался многими авторами, одними из первых работ были статьи [2 — 4]. Основным побудительным мотивом к написанию этой статьи послужили публикации [5, 6], в которых дается обоснование метода усреднения для разностного уравнения с переменным запаздыванием, имеющего вид

$$x(k+1) = x(k) + \varepsilon f(k, x(k), x(k-h(k))), \quad k \ge k_0, \quad x(k) = \varphi(k), \quad k_0 - P \le k \le k_0, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $0 \le h(k) \le P < \infty$ — запаздывание с целочисленными значениями, k — дискретное время, ε — неотрицательный малый параметр, f — заданная непрерывная функция, φ — начальная функция. В качестве усредненного уравнения берется

$$z(k+1) = z(k) + \varepsilon f_0(z(k), z(k-h(k))), \quad k \ge k_0, \quad z(k) = \varphi(k), \quad k_0 - P \le k \le k_0, \tag{1.2}$$

где $f_0(c_1, c_2) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j, c_1, c_2)$.

В структуре уравнения (1.1) очевидна аналогия с дифференциально-разностными уравнениями, метод усреднения для которых рассматривался, например, в работах [2, 7-8]. Но, если до конца следовать этой аналогии, то усредненное уравнение следует определить как

$$z(k+1) = z(k) + \varepsilon f_0(z(k), z(k)), \quad k \ge k_0. \tag{1.3}$$

Это уравнение уже не содержит запаздывания и по этой причине является более простым, чем уравнение (1.2). На самом деле принцип усреднения «допускает» использование в качестве усредненного как уравнение (1.3), так и уравнение (1.2), если предполагать, как это всегда делается в теории, что малый параметр ε может принимать сколь угодно малое значение. В практических приложениях значение малого параметра обычно ограничено снизу, а при «не слишком малых» значениях ε решения уравнения (1.2) точнее аппроксимируют решения уравнения (1.1) и это совершенно естественно. В [5, 6] приведены примеры численных расчетов, иллюстрирующие этот факт. Однако метод обоснования принципа усреднения, избранный авторами работ [5, 6], представляется нам неоправданно трудоемким. В нем используется понятие «среднего движения»[1], которое определяется следующим образом. Пусть $x(k)=x(k;k_0,\varphi)$ есть решение уравнения (1.1) с начальными данными k_0,φ. Тогда «среднее движение» $\bar{x}(k)$ определяется как

$$\bar{x}(k)=\begin{cases} \varphi(\mathrm{k}), & k_0-P\le k\le k_0, \\ \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i-k), & k>k_0. \end{cases}$$

В настоящей статье мы предлагаем более простой и прямой способ обоснования принципа усреднения для разностных уравнений весьма общего вида, охватывающего, в частности, и уравнения вида (1.1).

2. Принцип усреднения. В этом разделе будет дано обоснование принципа усреднения для основного класса разностных уравнений. Обозначим через $\mathcal{M}_P$ множество всех функций дискретного аргумента $\varphi:\{-P,\ldots,1,0\}\to\mathbf{R}^n$, $k\mapsto\varphi(k)$. Очевидно, что это множество отождествляется с множеством всех действительных $(n\times(P+1))$-матриц и является конечномерным векторным пространством размерности $n(P+1)$. Введем в $\mathcal{M}_P$ норму $\|\varphi\|=\max\{|\varphi(s)|:s=-P,\ldots,0\}$, где $|\cdot|$ — норма в $\mathbf{R}^n$, и для $x\in\mathbf{R}^n$ обозначим через e_x элемент из $\mathcal{M}_P$, определяемый как $e_x(s)=x$, для всех $s,-P\le s\le 0$. Пусть D — некоторая область в $\mathbf{R}^n$ и Ω есть множество функций из $\mathcal{M}_P$ со значениями в D. Рассмотрим отображение $F:\mathbf{Z}\times\mathcal{M}_P\to\mathbf{R}^n$, $(k,\varphi)\mapsto F(k,\varphi)$, предполагая, что для всех $k\ge k_0$ и $\varphi,\psi\in\Omega$ выполняются условия:

I. Функция F ограничена по норме константой $M_0>0$ и удовлетворяет условию Липшица с константой $L_0>0$ по второму аргументу, т.е. $|F(k,\varphi)|\le M_0$, $|F(k,\varphi)-F(k,\psi)|\le L_0\|\varphi-\psi\|$.

II. Равномерно по $x\in D$ и $k\ge k_0$ существует среднее значение $F_0(x)$ функции $F(k,e_x)$

[1] **The moving average** в оригинале.

$$F_0(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} F(k+s, e_x). \tag{2.1}$$

Нетрудно доказать следующее важное утверждение.

ЛЕММА 2.1. $|F_0(x)| \le M_0$, $|F_0(x) - F_0(y)| \le L_0|x-y|$, $\forall x, y \in D$.

Введем в рассмотрение основной класс разностных уравнений

$$x(k+1) = x(k) + \varepsilon F(k, x[k]), \quad k \ge k_0, \quad x[k_0](s) = \varphi(s), \quad -P \le s \le 0, \tag{2.2}$$

где $x[k]$ есть элемент пространства $\mathcal{M}_P$, определяемый как $x[k](s) = x(k+s)$, $s = -P, \dots, 0$. Очевидно, уравнение (1.1) является частным случаем уравнения (2.2). Усредненное уравнение определим как

$$\xi(k+1) = \xi(k) + \varepsilon F_0(\xi(k)), \quad k \ge k_0, \qquad \xi(k_0) = \varphi(k_0). \tag{2.3}$$

Принцип усреднения для (2.2) сформулируем следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функция F удовлетворяет условиям I и II, тогда сколь угодно малым положительным ρ, η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0, что если решение усредненного уравнения (2.3) $\xi(k)$ определено и содержится в области D вместе со своей ρ-окрестностью при всех $k \ge k_0$, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $k_0 \le k \le k_0 + L/\varepsilon$ справедливо неравенство: $|x(k) - \xi(k)| < \eta$. Если, кроме того, функция F периодическая по первому аргументу, то оценка улучшается: $|x(k) - \xi(k)| = O(\varepsilon)$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\widetilde{F}(k, \varphi) = F(k, \varphi) - F_0(\varphi(0))$ с нулевым средним на всех константах $e_x \in \mathcal{M}_P$ при $x \in D$, причем предельный переход

$$\frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \widetilde{F}(k+s, e_x) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} [F(k+s, e_x) - F_0(x)] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

равномерен по $x \in D$ и $k \ge k_0$. Следовательно для сколь угодно малого $\gamma > 0$ существует наименьшее натуральное N_γ такое, что при $N \ge N_\gamma$

$$\left| \sum_{s=0}^{N-1} \widetilde{F}(k+s, e_x) \right| < N\gamma \tag{2.4}$$

для всех $x \in D$ и $k \geq k_0$[1]. Представим функцию F в виде $F(k,\varphi) = F_0(\varphi(0)) + \widetilde{F}(k,\varphi)$, тогда уравнение (2.2) примет вид

$$x(k) = x(0) + \varepsilon \sum_{s=0}^{k} F_0(x(s)) + \varepsilon \sum_{s=0}^{k} \widetilde{F}(s, x[s]). \tag{2.5}$$

Преобразуя подобным образом правую часть усредненного уравнения, получим

$$\xi(k+1) = \xi(0) + \varepsilon \sum_{s=0}^{k} F_0(\xi(s)). \tag{2.6}$$

Обозначим $u(k) = |x(k) - \xi(k)|$. Вычитая (2.6) из (2.5) и используя неравенство Липшица, получим оценку

$$u(k) \leq \varepsilon \sum_{s=0}^{k-1} L_0 u(s) + \varepsilon \left| \sum_{s=0}^{k-1} \widetilde{F}(s, x[s]) \right|. \tag{2.7}$$

Имея целью применить к полученному неравенству дискретный аналог[2] неравенства Гронуолла, покажем, что второе слагаемое в неравенстве (2.7) при достаточно малых значениях параметра ε будет меньше любого наперед заданного числа. Пусть $\gamma > 0$ — некоторое малое число, значение которого будет уточнено ниже, и пусть целое $N_\gamma > 0$ удовлетворяет (2.4). Выберем натуральное Q так, что

$$QN_\gamma \leq k \leq (Q+1) N_\gamma, \tag{2.8}$$

тогда, обозначая для краткости записи $\Phi(s) = \widetilde{F}(s, x[s])$, имеем

$$\sum_{s=0}^{k-1} \Phi(s) = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{s=0}^{N_\gamma - 1} \Phi(qN_\gamma + s) + \underbrace{\Phi(QN_\gamma) + \ldots + \Phi(k-1)}_{\leq N_\gamma - 1}, \tag{2.9}$$

где в последней группе не более $N_\gamma - 1$ слагаемых. Обозначим

$$r_{m,s} = \widetilde{F}(m+s, x[m+s]) - \widetilde{F}(m+s, e_{x(m)}).$$

Используя представление $x(q) = x(p) + \varepsilon \sum_{j=p}^{q-1} F(j, x[j])$, получим оценку

$$|x(q) - x(p)| \leq \varepsilon M_0 |(q-p)|.$$

Отсюда, учитывая утверждение леммы 2.1, имеем

$$|r_{m,s}| \leq L_0 \| x[m+s] - e_{x(m)} \| = \max_{-P \leq l \leq 0} |x(m+s+l) - x(m)| \leq \varepsilon L_0 M_0 \max_{-P \leq l \leq 0} |s+l|.$$

---

[1] Далее для сокращения записи считаем $k_0 = 0$.

[2] Пусть $v(s) \geq 0$, $s \geq 0$, $A = \text{const} > 0$ и $u(k) \leq A + \sum_{s=0}^{k-1} v(s) u(s)$, $k \geq 1$, $u(0) \leq A$, тогда $u(k) \leq A \prod_{s=0}^{k-1} (1 + v(s))$, $k \geq 0$.

Обозначим $[[a]]$ целую часть действительного числа a. Согласно (2.9) $0 \le s \le N_\gamma - 1$. Нетрудно показать, что

$$\max_{-P\le l\le 0}|s+l| = \begin{cases} P-s, & 0 \le s \le [[0{,}5P]], \\ s, & s \ge [[0{,}5P]]+1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{N_\gamma-1}\max_{-P\le l\le 0}|s+l| = \sum_{s=0}^{[[0,5P]]}(P-s) + \sum_{s=[[0,5P]]+1}^{N_\gamma-1} s = (1+[[0{,}5P]])P - 2\sum_{s=1}^{[[0,5P]]} s + \sum_{s=1}^{N_\gamma-1} s =$$

$$= (1+[[0{,}5P]])(P-[[0{,}5P]]) + N_\gamma \frac{N_\gamma - 1}{2}$$

Теперь мы готовы выписать окончательный результат

$$\left|\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{F}(s,x[s])\right| \le$$

$$\le \sum_{q=0}^{Q-1}\left|\sum_{s=0}^{N_\gamma-1}\widetilde{F}(qN_\gamma+s, e_{x(qN_\gamma+s)}) + r_{qN_\gamma,s}\right| + \left|\widetilde{F}(QN_\gamma, e_{x(QN_\gamma)})\right| + \ldots + \left|\widetilde{F}(k-1, e_{x(k-1)})\right| \le$$

$$\le \sum_{q=0}^{Q-1}\left|\sum_{s=0}^{N_\gamma-1}\widetilde{F}(qN_\gamma+s, e_{x(qN_\gamma+s)})\right| + \sum_{q=0}^{Q-1}\sum_{s=0}^{N_\gamma-1}\left|r_{qN_\gamma,s}\right| + (N_\gamma - 1)M_0 \le$$

$$\le QN_\gamma\gamma + \varepsilon L_0 M_0 Q((1+[[0{,}5P]])(P-[[0{,}5P]]) + N_\gamma \frac{N_\gamma - 1}{2}) + (N_\gamma - 1)M_0.$$

По условию $QN_\gamma \le k \le L\varepsilon^{-1}$, поэтому

$$\varepsilon\left|\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{F}(s,x[s])\right| \le L\gamma + \varepsilon L_0 M_0(\varepsilon Q(1+[[0{,}5P]])(P-[[0{,}5P]]) + \\ + 0{,}5L(N_\gamma - 1)) + \varepsilon(N_\gamma - 1)M_0 \le \eta e^{-LL_0} \tag{2.10}$$

при достаточно малых γ и ε. Определим γ из условия

$$L\gamma \le 0{,}5\eta\exp(-LL_0), \tag{2.11}$$

а затем выберем значение $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$

$$\varepsilon^2 L_0 M_0 Q(1+[[0{,}5P]])(P-[[0{,}5P]]) + \varepsilon(N_\gamma - 1)M_0(1+0{,}5LL_0) \le 0{,}5\eta e^{-LL_0}. \tag{2.12}$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ из (2.7) и (2.10) — (2.12) следует оценка

$$u(k) \le \varepsilon \sum_{s=0}^{k-1} L_0 u(s) + \eta \exp(-LL_0).$$

Применяя неравенство Гронуолла для функций дискретного аргумента, отсюда получаем

$$u(k) \le \eta \exp(-LL_0) \prod_{s=0}^{k-1} (1 + \varepsilon L_0) = \eta \exp(-LL_0)(1 + \varepsilon L_0)^k < \eta .$$

Здесь мы учли что $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \uparrow e$ при $\varepsilon \to 0$ и поэтому $(1+\varepsilon L_0)^k \le (1+\varepsilon L_0)^{\frac{1}{\varepsilon}} =$ $= [(1+\varepsilon L_0)^{\frac{1}{\varepsilon L_0}}]^{LL_0} < \exp(LL_0)$. Остается заметить, что следует предполагать, что $\eta < \rho$. Основное утверждение теоремы доказано.

В случае периодичности $F(k,\varphi)$ по k в наших оценках следует считать, что $\gamma = 0$, а N_γ равняется периоду. Искомое неравенство вытекает из оценки (2.10). Теорема полностью доказана.

Литература.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
2. Митропольский Ю. А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. — К.: Наукова думка, 1966. — 469 с.
3. Белан Е. П. О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений // Укр. матем. журнал. — 1967. — Т.19. — С. 85 — 90.
4. Halanay A. Solution périodiques et preque-périodiques des systemés d'equations aux differences finies // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1962. — V.12, No.2 — P. 131 — 139.
5. Lehman B. and Weibel S. P. Averaging of Discrete Difference Equations with Time-Varying Delays. Proceedings of the 1997 Conference on Decision and Control, 1997. — P.4456—4562.
6. Lehman B. and Weibel S. P. Moving Averages for Periodic Delay Differential and Difference Equations, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1997. — P.158—183.
7. Hale J. K. Averaging Methods for Differential Equations with Retarded Arguments with a Small Parameter // J. of Differential Equations. — 1966. — V.2 — P. 57 — 73.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир. — 1984. — 421 с.