МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ГИДРОСИСТЕМЫ

Закора Д. А., аспирант

1. Постановка задачи.

Рассмотрим сосуд, частично заполненный двумя несжимаемыми несмешивающимися жидкостями. Сосуд равномерно вращается вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Жидкости предполагаются тяжелыми, поэтому действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_1, нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена вязкой жидкостью плотности ρ_1 с динамическим коэффициентом вязкости μ (кинематический коэффициент вязкости $\nu = \mu / \rho_1$). Область Ω_2 заполнена идеальной жидкостью плотности ρ_2, $0 < \rho_2 < \rho_1$.

Обозначим через $\vec{n}_i$ $(i = 1,2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ $(i = 1,2)$. Через S_i обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_i $(i = 1,2)$. Обозначим через $\Gamma_1 := \partial\Omega_1 \setminus \overline{S}_1$ – свободную поверхность первой жидкости, и через $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 := \partial\Omega_2 \setminus \overline{S}_2$ – свободные поверхности второй жидкости. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на равновесной поверхности Γ_1. В этом случае равномерная скорость вращения сосуда запишется в виде $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_3$. Будем считать для определенности, что $\omega_0 > 0$.

Постановка линейной задачи о малых движениях рассматриваемой гидросистемы имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{u}_1 \times \vec{e}_3) = -\rho_1^{-1}\nabla p_1 + \nu\Delta\vec{u}_1 + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \qquad (\text{в } \Omega_1),$$

$$\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{u}_2 \times \vec{e}_3) = -\rho_2^{-1}\nabla p_2 + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0 \qquad (\text{в } \Omega_2), \tag{1}$$

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \qquad (\text{на } S_1), \qquad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \qquad (\text{на } S_2),$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \qquad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 \qquad (\text{на } \Gamma_2), \tag{1}$$

$$p_2 = \rho_2 a_2 \zeta_2 \qquad (\text{на } \Gamma_2), \qquad \mu((u_1)_{i,3} + (u_2)_{3,i}) = 0 \qquad (\text{i=1, 2; на } \Gamma_1),$$

$$-p_1+2\mu(u_1)_{3,3}=-(\Delta\rho)a_1\zeta_1-p_2, \quad (\text{ на } \Gamma_1), \qquad \Delta\rho:=\rho_1-\rho_2>0,$$

$$\vec{u}_i(0,x)=\vec{u}_i^0(x), \quad \zeta_i(0,\hat{\xi}_i)=\zeta_i^0(\hat{\xi}_i) \qquad (\text{ i=1, 2 }). \tag{2}$$

Здесь $\vec{u}_i$ $(i=1,2)$ — поля скоростей жидкостей в соответствующих областях, p_i $(i=1,2)$ — динамические давления в жидкостях, ζ_i $(i=1,2)$ — малые нормальные отклонения свободных границ от состояния равновесия, a_i $(i=1,2)$ — известные гладкие функции заданные на Γ_i $(i=1,2)$, $\vec{f}$ — малое поле внешних массовых сил. Далее считаем, что движения гидросистемы статически устойчивы по линейному приближению; это означает, что функции a_i $(i=1,2)$ строго положительны на Γ_i $(i=1,2)$.

2. Операторная формулировка задачи и сильные решения соответствующей задачи Коши.

Применим к задаче (1) метод ортогонального проектирования. После отделения тривиальных решений основную задачу можно записать в виде дифференциального уравнения в ортогональной сумме гильбертовых пространств $\widetilde{H}:=\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)\oplus H_1\oplus H$:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & C_{1,2} \\ 0 & B_1 & 0 \\ C_{2,1} & 0 & B_C \end{pmatrix} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \zeta_1 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu A & G_1B_1 & 0 \\ -B_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \zeta_1 \\ v \end{pmatrix} + 2\omega_0 i\begin{pmatrix} S_{1,1} & 0 & S_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & 0 & S_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \zeta_1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$(\vec{u}_1,\zeta_1,v)'(0)=(\vec{u}_1,\zeta_1,v)^{0\prime}, \tag{4}$$

где $\quad H:=\vec{G}_2(\Omega_2)\oplus\vec{J}_0(\Omega_2)\oplus H_2, \qquad H_i:=L_{2,\Gamma_i} \quad (i=1,2),$

$$\vec{J}_{0,S_1}:=\left\{\vec{u}_1\in\vec{L}_2(\Omega_1)\,\middle|\ \operatorname{div}\vec{u}_1=0 \quad (\text{ в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1=0 \quad (\text{ на } S_1)\ \right\},$$

$$\vec{G}_2(\Omega_2):=\left\{\vec{w}:=\nabla p\ \middle|\ \Delta p=0 \quad (\text{ в } \Omega_2), \quad \frac{\partial p}{\partial\vec{n}_2}=0 \quad (\text{ на } S_2\cup\Gamma_1), \quad \int_{\Gamma_2}p\,d\Gamma_2=0\ \right\},$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2):=\left\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega_2)\,\middle|\ \operatorname{div}\vec{v}=0 \quad (\text{ в } \Omega_2), \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_2=0 \quad (\text{ на } \partial\Omega_2)\ \right\},$$

$$(\vec{u}_1,\zeta_1,v)':=(\vec{u}_1;\zeta_1;\vec{w},\vec{v},\zeta_2)'.$$

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{J}:=\begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & C_{1,2} \\ 0 & B_1 & 0 \\ C_{2,1} & 0 & B_C \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}:=\begin{pmatrix} \mu A & G_1B_1 & 0 \\ -B_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad \widetilde{S}:=\begin{pmatrix} S_{1,1} & 0 & S_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & 0 & S_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}:=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$y:=(\vec{u}_1,\zeta_1,v)', \qquad f:=(\vec{f}_1,0,f_2)', \qquad B_1\gamma_1A^{-\frac{1}{2}}=:Q, \qquad A^{-\frac{1}{2}}G_1B_1=:Q^+.$$

Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$\widetilde{J}\frac{dy}{dt}+\widetilde{A}y+2\omega_0 i\widetilde{S}y=f\ . \tag{5}$$

Сделаем в уравнении (5) замену $y(t)=e^t z(t)$. В результате получим уравнение относительно z:

$$\widetilde{J}\frac{dz}{dt}+\left(\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}\right)z+\left(\widetilde{J}-\varepsilon\widetilde{P}\right)z+2\omega_0 i\widetilde{S}z=e^{-t}f\ , \tag{6}$$

где число $\varepsilon>0$ выбрано таким образом, что $\widetilde{J}-\varepsilon\widetilde{P}\gg 0$. Это возможно, так как $\widetilde{J}\gg 0$ в $\widetilde{H}$.

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $0\ll\widetilde{J}=\widetilde{J}^*\in L(\widetilde{H}),\quad \widetilde{S}=\widetilde{S}^*\in L(\widetilde{H})$;

2. $F=-F^*$ *неограничен в* H;

3. $0\ll\widetilde{A}=\widetilde{A}^*,\quad \widetilde{A}^{-1}\in S_\infty$;

4. $Q^+\subset Q^*,\quad Q^+=Q^*\big|_{D(G_1)},\quad \overline{Q}^+=Q^*$;

5. оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ *аккретивен.*

Доказательство леммы довольно обширно и потому здесь не приводится.

Оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ не является замкнутым из-за того, что оператор γ_1 неограничен в $\vec{J}_{0.S_1}(\Omega_1)$ и $D(\gamma_1)\supset D(\widetilde{A})$. Таким образом, оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ не является максимальным аккретивным, но допускает замыкание до максимального аккретивного оператора.

ЛЕММА 2. *Замыкание* A_0 *оператора* $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ *есть максимальный аккретивный оператор.*

При этом $D(A_0)=\left\{(\vec{u}_1,\zeta_1,v)^t\ \middle|\ \mu\vec{u}_1+A^{-\frac{1}{2}}Q^*\zeta_1\in D(A),\quad v\in D(F)\ \right\}$,

$$A_0=\begin{pmatrix}A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0\\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mu I_1 & Q^* & 0\\ -Q & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon I+F\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0\\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что оператор $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ можно представить в форме, аналогичной A_0 с заменой Q^* на Q^+. Замыкание оператора $\widetilde{A}+\varepsilon\widetilde{P}$ состоит в замене в среднем блоке Q^+ на Q^*. Действительно, оператор A_0 представлен в виде произведения трех замкнутых операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный, а значит (это можно доказать) он замкнут.

Найдем область определения $D(A_0)$ оператора A_0. Прежде всего, из представления для оператора A_0 следует, что $\vec{u}_1\in D(A^{\frac{1}{2}}),\quad v\in D(F)$. Далее, должно иметь смысл следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu A^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + Q^{*}\zeta_1 \\ -QA^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + \varepsilon\zeta_1 \\ (\varepsilon I + F)v \end{pmatrix},$$

то есть $\mu A^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + Q^{*}\zeta_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ или $\mu\vec{u}_1 + A^{-\frac{1}{2}}Q^{*}\zeta_1 \in D(A)$. Таким образом, заключаем

$$D(A_0) = \left\{(\vec{u}_1, \zeta_1, v)^t \mid \mu\vec{u}_1 + A^{-\frac{1}{2}}Q^{*}\zeta_1 \in D(A), \quad v \in D(F)\right\}.$$

Заметим, что условие $\vec{u}_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ следует из требования $\mu\vec{u}_1 + A^{-\frac{1}{2}}Q^{*}\zeta_1 \in D(A)$. Действительно, так как $D(A) \subset D(A^{\frac{1}{2}})$ и $A^{-\frac{1}{2}}Q^{*}\zeta_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ для любого $\zeta_1 \in H_1$, то $\vec{u}_1$ также принадлежит $D(A^{\frac{1}{2}})$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь уравнение (6) с заменой $\widetilde{A} + \varepsilon\widetilde{P}$ на замкнутый оператор A_0. Оператор $A_0 + \widetilde{J} - \varepsilon\widetilde{P} + 2\omega_0\widetilde{S}$ уже максимальный аккретивный. Введем в $\widetilde{H}$ эквивалентную норму с помощью квадратичной формы оператора $\widetilde{J}$ и преобразуем уравнение (6) к виду

$$\frac{dz}{dt} = -\widetilde{J}^{-1}\left(A_0 + \widetilde{J} - \varepsilon\widetilde{P} + 2\omega_0 i\widetilde{S}\right)z + e^{-t}f, \quad z(0) = y^{o}. \tag{7}$$

ТЕОРЕМА 1. *Начально-краевая задача (1) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$, выражаемое формулой*

$$z(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-\tau)\widetilde{J}^{-1}e^{-\tau}f(\tau)d\tau,$$

$$U(t) := \exp\left(-t\widetilde{J}^{-1}\left(A_0 + \widetilde{J} - \varepsilon\widetilde{P} + 2\omega_0 i\widetilde{S}\right)\right),$$

если выполнены следующие условия:

1. $y^0 \in D(A_0)$,

2. $f(t) \in C^1([0,T]; \widetilde{H})$.

Записывая уравнение (7) в виде системы, можно показать, что для начальных данных из области определения незамкнутого оператора соответствующее решение также находится в области определения незамкнутого оператора. Осуществляя в этой системе обратную замену $z(t) = e^{-t}y(t)$, мы прийдем к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2. *Задача Коши (3)-(4) имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *если выполнены следующие условия:*

1. $y^0 \in D(\widetilde{A})$,

2. $f(t) \in C^1([0,T];\widetilde{H})$.

Переформулировка последнего результата в терминах исходной задачи приводит нас к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 3. *Начально-краевая задача (1) имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *если выполнены условия:*

1. $\vec{u}_1^0 \in D(A)$, $\vec{u}_2^0 \in \vec{H}^{1/2}(\Omega_2) \cap \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2)$, $\zeta_i^0 \in H^{1/2}{}_{\Gamma_i}$ $(i = 1,2)$,

$$\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) := \{\vec{u}_2 \in \vec{L}_2(\Omega_2) \mid div\,\vec{u}_2 = 0 \ (\textit{в}\ \Omega_2), \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \ (\textit{на}\ S_2),$$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 \, d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 \, d\Gamma_2 = 0 \ \},$$

причем $\vec{u}_1^0(x) \cdot \vec{n}_1 = -\vec{u}_2^0(x) \cdot \vec{n}_2$ *(на* Γ_1*).*

2. $\vec{f}(t) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega))$ $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2)$.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н. Д. Копачевскому за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.