УДК 517.9

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Анашкин О. В.[1]

В рамках прямого метода Ляпунова получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. В отличие от известного критерия Красовского функция Ляпунова не является монотонной вдоль решений системы.

Ключевые слова: экспоненциальная устойчивость, функции Ляпунова, нелинейные дифференциальные уравнения, усреднение

ВВЕДЕНИЕ

Экспоненциальная устойчивость является важным частным типом асимптотической устойчивости. Например, в линейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами асимптотическая устойчивость может быть только экспоненциальной. Для исследования устойчивости с успехом применяется второй метод Ляпунова [1]. В рамках этого метода вопрос был основательно изучен Н. Н. Красовским, который в своей фундаментальной монографии [2] показал, что для экспоненциальной устойчивости нулевого решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида необходимо и достаточно существование функции Ляпунова, обладающей свойствами, характерными для квадратичных форм. Изложим критерий Красовского подробнее.

Пусть правая часть системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x) \tag{1}$$

непрерывна и имеет непрерывные частные производные по фазовым переменным в области $G = R_+ \times B_H$, где $R_+ = [0,\infty)$, $B_H = \{x \in R^n : |x| < H\}$, $|\cdot|$ – норма в R^n. Пусть $x(t;t_0,x_0)$ – решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Нулевое решение системы (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если для некоторых постоянных $\alpha > 0$, $C > 0$, $h \in (0,H)$ и для всех $t \ge t_0$, $x_0 \in B_h$

$$|x(t;t_0,x_0)| \le C|x_0| \exp[-\alpha(t-t_0)]. \tag{2}$$

Согласно Красовскому, оценка (2) имеет место тогда и только тогда, когда существует функция Ляпунова $v: G \to R_+$, такая, что в области G

[1] Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, E-mail: anashkin@crimea.edu

$$c_1|x|^2 \le v(t,x) \le c_2|x|^2, \tag{3}$$

$$\dot{v}\big|_{(1)} = v_t + v_x X(t,x) \le -c_3|x|^2, \tag{4}$$

$$|v_x| \le c_4|x|, \tag{5}$$

где $c_1,\ldots,c_4$ – некоторые положительные постоянные, v_x – градиент функции v. При этом не имеет значения, является система (1) линейной или нелинейной. Впрочем, очевидно, что в нелинейной системе (1) нулевое решение может быть экспоненциально устойчивым в том и только в том случае, когда система имеет экспоненциально устойчивое линейное приближение.

Естественным недостатком универсальности критерия Красовского является то, что поиск функции v, удовлетворяющей условиям (3) – (5), может оказаться слишком трудной задачей. В настоящей статье предлагаются достаточные условия экспоненциальной устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений, близкой к устойчивой. Используется метод обобщенных функций Ляпунова [3–4], применявшийся ранее для исследования асимптотической устойчивости [5–7]. Обобщенные функции Ляпунова не являются, вообще говоря, монотонно убывающими вдоль решений и это существенно облегчает подбор подходящих функций.

Предлагаемый подход применим и к функционально-дифференциальным уравнениям, рассмотренного в статьях [7–9] типа.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t,x,\mu) = f(t,x) + \mu r(t,x,\mu),\ F(t,0,\mu) \equiv 0, \tag{6}$$

где μ – малый неотрицательный параметр, функция $r(t,x,0)$ не равна нулю тождественно, функция F определена в области $G\times[0,\mu_*]$, непрерывна по μ в точке $\mu=0$ и при каждом фиксированном $\mu\in[0,\mu_*]$ удовлетворяет условиям Каратеодори [10] в области G, т.е., $F(t,x,\mu)$ измерима по t, непрерывна по x при почти всех $t\in R_+$ и имеет суммируемую мажоранту. Предполагается, что функции f и r удовлетворяют условию Липшица по x с функцией Липшица $L\in UI(R_+)$, где $UI(R_+)$ класс равномерно суммируемых на R_+ функций $M: R_+ \to R_+$ таких, что $\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \le M_0(t_2-t_1)$, на любом конечном отрезке $[t_1,t_2]\subset R_+$.

Наряду с *возмущенной* системой (6) рассмотрим *невозмущенную* систему

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{7}$$

Предполагается, что функция f допускает в некоторой окрестности начала пространства фазовых переменных представление: $f(t,x) = A(t)x + g(t,x)$, где $A(t)$ –

$n\times n$-матрица (возможно $A(t)\equiv 0$), а функция $g(t,x)$ удовлетворяет в области G неравенству $|g(t,x)|\le M(t)|x|^{d_0}$ для некоторой постоянной $d_0>1$ и функции $M\in UI(R_+)$.

Введем в рассмотрение *линеаризацию* невозмущенной системы

$$\dot z = A(t)z. \tag{8}$$

Далее будем обозначать $x(t,\mu)=x(t;t_0,x_0,\mu)$ и $x(t,0)=x(t;t_0,x_0,0)$ решения возмущенной системы (6) и невозмущенной системы (7), соответственно, с начальными данными $(t_0,x_0)\in G$. Пусть невозмущенная система имеет равномерно устойчивое нулевое решение и $v:G\to R_+$ есть соответствующая определенно положительная и допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова. Для производной функции v в силу уравнений возмущенной системы (6) получим неравенство: $\dot v\big|_{(6)}=\dot v\big|_{(7)}+\mu\varphi(t,x,\mu)\le\mu\varphi(t,x,\mu)$, где $\varphi(t,x,\mu)=\dfrac{\partial v}{\partial x}r(t,x,\mu)$. Теперь мы готовы сформулировать достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

Теорема. *Пусть для всех $(t,x)\in G$ выполнены требования:*

1) существует дифференцируемая функция $v:G\to R_+$, производная которой в силу уравнений системы (6) не положительна и для некоторых постоянных $0<\nu_1\le\nu_2$, $m>1$ справедливы неравенства:

$$\nu_1|x|^m\le v(t,x)\le\nu_2|x|^m; \tag{9}$$

2) существует функция $M\in UI(R_+)$, такая, что

$$|\varphi(t,x,\mu)|\le M(t)|x|^m \text{ для } \mu\in[0,\mu_*],$$

$$|\varphi(t,x,\mu)-\varphi(t,y,\mu)|\le M(t)\rho^{m-1}|x-y|$$

для любых $x,y\in B_\rho$, $0<\rho<H$, $\mu\in[0,\mu_*]$;

3) существуют постоянные $T>0$, $\delta>0$ и $h\in(0,H)$ такие, что для всех $t_0\ge 0$, $x_0\in B_h$ при $\Delta t\ge T$ имеет место оценка

$$I(\Delta t;t_0,x_0)=\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\varphi(t,z(t;t_0,x_0),0)dt\le -2\delta|x_0|^m\Delta t,$$

где $z(t;t_0,x_0)$ – решение линеаризации (8).

Тогда существует $\mu_0>0$ такое, что при всех $\mu\in(0,\mu_0]$ нулевое решение возмущенной системы (6) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. В условиях данной теоремы справедлива любая из теорем о равномерной асимптотической устойчивости [7–9]. В статье [8] в ходе доказательства теоремы выводится основное неравенство

$$V_{k+1} \le V_k - \mu\Delta T|x_k|^m,\ k = 0,1,..., \tag{10}$$

где $V_k = v(t_k, x_k)$, $t_k = t_0 + kT$, $x_k = x(t_k, \mu)$. Это неравенство справедливо для любых $t_0 \ge 0$, $x_0 \in B_h$ и $\mu \in (0, \mu_0]$ для достаточно малого $\mu_0 > 0$. Из (10) с учетом неравенства (9) в условии 1) теоремы получим для любого $k = 0,1,...$

$$v_1|x_k|^m \le V_k \le \left(1 - \mu\frac{\delta T}{v_2}\right)^k V_0 \le \left(1 - \mu\frac{\delta T}{v_2}\right)^k v_2|x_0|^m. \tag{11}$$

Это означает экспоненциальное убывание последовательности $\left\{|x(t_k, \mu)|^m\right\}$:

$$|x(t_k, \mu)|^m \le \frac{v_2}{v_1}\left(1 - \mu\frac{\Delta T}{v_2}\right)^k |x_0|^m, \qquad k = 0,1,.... \tag{12}$$

Принимая во внимание, что $-\ln(1 - \mu c) = c\mu + \dfrac{c^2\mu^2}{2} + \dfrac{c^3\mu^3}{3} + ... > c\mu$ при $c > 0$, (12) можно заменить неравенством $|x(t_k, \mu)| \le \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^{1/m} \exp\left(-\mu\dfrac{\Delta Tk}{v_2 m}\right)|x_0|$. Функция Ляпунова v не возрастает вдоль решения $x(t, 0)$ невозмущенной системы (7), поэтому из (9) получаем: $v_1|x(t, 0)|^m \le v(t, x(t, 0)) \le v(t_0, x_0) \le v_2|x_0|^m$. Отсюда для любого $t \ge t_0$ имеем

$$|x(t, 0)| \le \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1/m} |x_0|, \tag{13}$$

Принимая во внимание (13) и лемму Гронуолла, на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T]$ легко получить оценку

$$|x(t, \mu) - x(t, 0)| \le \mu C_0(T)|x_0|, \tag{14}$$

где $C_0(T)$ – постоянная, не зависящая от начальных данных t_0 и x_0. Из (13) и (14) для $t_0 \le t \le t_0 + T$ имеем

$$|x(t, \mu)| \le |x(t, 0)| + |x(t, \mu) - x(t, 0)| \le \left(\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1/m} + \mu C_0(T)\right)|x_0|. \tag{15}$$

Основное неравенство (10) и неравенство (12), верно для всякого $t_0 \geq 0$, поэтому при любом $s \in [0,T]$ $|x(t_0+s+Tk,\mu)|^m \leq \frac{\nu_2}{\nu_1}\left(1-\mu\frac{\Delta T}{\nu_2}\right)^k |x(t_0+s,\mu)|^m$. Используя (15), отсюда получим

$$|x(t_0+s+Tk,\mu)| \leq \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1/m}\left(1-\mu\frac{\Delta T}{\nu_2}\right)^{k/m}\left(\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1/m}+\mu C_0(T)\right)|x_0|. \quad (16)$$

Положим $\alpha_0 = \frac{\delta}{m\nu_2}$. Пусть $\mu_0 C_0(T) \leq \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1/m}$, тогда из (13) и (16) получим для любых $s \in (0,T]$ и $\mu \in (0,\mu_0]$ оценку

$$|x(t_0+s+Tk,\mu)| \leq 2\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{1/m} \exp(\mu_0\alpha_0 T)\exp[-\mu\alpha_0(Tk+s)]|x_0|.$$

Здесь мы учли, что

$$\exp(-\mu\alpha_0 Tk) = \exp(\mu\alpha_0 s)\exp[-\mu\alpha_0(Tk+s)] \leq \exp(\mu_0\alpha_0 T)\exp[-\mu\alpha_0(Tk+s)].$$

Таким образом, для любого $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in B_h$ справедливо неравенство (2) с параметрами: $C = 2\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{2/m} \exp\left(\mu_0\frac{\delta}{m\nu_2}T\right)$ и $\alpha = \mu\frac{\delta}{m\nu_2}T$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как уже было отмечено выше, доказанная теорема есть по сути частный вариант теоремы о равномерной асимптотической устойчивости [7–9]. Таким образом мы показали, что методика, применяемая в этих работах, может использоваться и для исследования экспоненциальной устойчивости. При этом, в отличие от критерия Красовского, изложенного во введении, функция Ляпунова в условии нашей теоремы не является монотонно изменяющейся вдоль решений системы. Это существенно расширяет класс подходящих функций.

В качестве одного из следствий доказанной теоремы нетрудно получить известное утверждение о том, что экспоненциальная устойчивость нулевого решения усредненной системы в стандартной форме влечет экспоненциальную устойчивость нулевого решения исходной системы. Отметим, что этот результат был воспроизведен в недавней публикации Aeyels и Peuteman [11], которые также используют немонотонную функцию Ляпунова, но при более жестких ограничениях на гладкость правой части системы, чем в нашей статье.

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – Л.-М.: ОНТИ, 1935. – 386с.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
3. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
4. Хапаев М. М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. – М.: Высшая школа, 1988. – 184 с.
5. Анашкин О. В. Об асимптотической устойчивости в нелинейных системах // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 8. – С. 1490 – 1493.
6. Анашкин О. В. Асимптотические методы в теории устойчивости. – Симферополь: СГУ, 1983. – 48с.
7. Анашкин О. В. Метод усреднения в теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, №4. – С. 448 – 457.
8. Анашкин О. В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 867 – 876.
9. Анашкин О. В. Об одном методе исследования на устойчивость в теории функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки СГУ. – 1998. – № 7(46). – С. 54 – 56.
10. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
11. Aeyels D., Peuteman J. On exponential stability of nonlinear time-varying differential equations // Automatica. – 1999. – V. 35. – P. 1091 1100.

Анотація

Анашкін, О. В. Функції Ляпунова у задачі про експоненціальну стійкість // Вчені записки ТНУ. – 2000. – No.000 – С. 00 – 00.

В границях прямого методу Ляпунова одержані достатні умови експоненційної стійкості нульового розв'язку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром. На відміну від звичайного критерія М.М.Красовського функція Ляпунова не є монотонною вздовж розв'язків системи.

Ключови слова: експоненційна стійкість, функції Ляпунова, нелінійні диференціальні рівняння, усреднення

Summary

Anashkin, O. V. Lyapunov functions in the problem on exponential stability // Uchenye zapiski TNU, 2000, 99, No.0, 00 – 00.

In the framework of Lyapunov's direct method, sufficient conditions for exponential stability of the zero solution of nonlinear system of ordinary differential equations with a small parameter are obtained. Unlike with the well-known Krasovskii's criterion the Lyapunov function is non-monotone along solutions of the system.

Keywords: exponential stability, Lyapunov functions, nonlinear differential equations, averaging.