ОСОБЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ ГРУПП E_6

Кобец А. А., ассистент

Пусть G есть конечная группа, порожденная отражениями относительно $(n-1)$-мерных плоскостей, в вещественном пространстве E^n. Особое многообразие M состоит из действительных векторов x, таких что $\prod_{i=1}^{n} I_{n_i}^{G}(x)=0$; здесь $I_{n_i}^{G}$ – базисные инварианты Флатто-Винер степеней n_i группы G [1], вектор $x=(x_i)$. Многообразия M для групп $G=I_2^r$, A_3 приведены в работе [1]. Найдем некоторые подмногообразия для группы E_6.

В прямоугольной системе координат $Ox_i (i=\overline{1,6})$ двадцать семь вершин многогранника 2_{21} зададим строками следующей матрицы (см. [2]):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu \\ -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda \\ c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_\lambda=\cos\frac{2\pi\lambda}{3}$, $s_\lambda=\sin\frac{2\pi\lambda}{3}$; $\lambda,\mu=1,2,3$. При этом все тридцать шесть плоскостей симметрии многогранника 2_{21} определяются такими уравнениями:

$x_2=0$, $x_4=0$, $x_6=0$, $\sqrt{3}x_1\pm x_2=0$, $\sqrt{3}x_3\pm x_4=0$, $\sqrt{3}x_5\pm x_6=0$, $x_1+x_3+x_5==0$, $x_1\pm\sqrt{3}x_2-2x_3-2x_5=0$, $x_1\pm\sqrt{3}x_2+x_3\pm\sqrt{3}x_4+2x_5=0$, $x_1\pm\sqrt{3}x_2-2x_3+$ $+x_5\pm\sqrt{3}x_6=0$, $x_1\pm\sqrt{3}x_2+x_3\pm\sqrt{3}x_4+x_5\pm\sqrt{3}x_6=0$, $2x_1-x_3\pm\sqrt{3}x_4+2x_5=$ $=0$, $2x_1-x_3\pm\sqrt{3}x_4+x_5\pm\sqrt{3}x_6=0$, $2x_1+2x_3-x_5\pm\sqrt{3}x_6=0$.

Любой инвариант группы E_6 является многочленом относительно

$$u_p=3x_\beta^2x_\alpha-x_\alpha^3,\ v_p=x_\alpha^2+x_\beta^2; \tag{1}$$

$p=1,2,3$ соответственно $(\alpha\beta)=(12),(34),(56)$ [3].

Пусть $R^6(u_p,v_p)$ – пространство переменных u_p,v_p. Формулы (1) задают преобразование пространства E^6 в пространство $R^6(u_p,v_p)$.

Лемма 1. Базисные инварианты Флатто-Винер пятой и шестой степеней имеют вид

$$\begin{aligned} I_5&=C_5=\sum u_p(v_q-v_r),\\ I_6&=3\sum v_p^3-9\sum_{p\neq q}v_p^2v_q+72v_1v_2v_3-2\sum u_p^2+20\sum_{p<q}u_pu_q, \end{aligned} \tag{2}$$

где индексы $p,q,r = 1,2,3$ (циклически).

Доказательство. Запишем базисные инварианты пятой и шестой степеней группы E_6 [2]:

$$C_5 = \sum u_p(v_q - v_r),$$
$$C_6 = -\sum u_p^2 + 10\sum_{p\neq q} u_p u_q + 3\sum v_p^3 + 45 v_1 v_2 v_3 .$$

Инвариант $I_5 = C_5$. Представим инвариант Флатто-Винер шестой степени в виде $I_6 = aI_2^3 + bC_6$. Запишем дифференциальные уравнения $I_2(\partial)I_6 = 0$, $I_5(\partial)I_6 = 0$, где $I_2(\partial)$, $I_5(\partial)$ – дифференциальные операторы, получаемые заменой переменных x_i на $\partial/\partial x_i$ в многочленах I_2, I_5. Они дают число $a = -\frac{3}{2}b$. Следовательно, инвариант I_6 имеет вид (2).

Пусть $I_5^0 = \sum_{p=1}^{3}(y_p^2 - y_{p+3}^2)$.

Имеет место

Теорема 1. В пространстве $R^6(y_i)$, $i=\overline{1,6}$, особое подмногообразие, определяемое базисным инвариантом I_5, состоит из направляющих векторов вещественных прямых, лежащих на конусе второго порядка $I_5^0 = 0$ индекса три с точечной вершиной.

Действительно, преобразование пространства $R^6(u_p,v_p)$ в пространство $R^6(y_i), i=\overline{1,6}$, определяемое формулам $u_1 + v_2 = \sqrt{2}y_1$, $u_2 + v_3 = \sqrt{2}y_2$, $u_3 + v_1 = \; = \sqrt{2}y_3$, $u_1 + v_3 = \sqrt{2}y_4$, $u_2 + v_1 = \sqrt{2}y_5$, $u_3 + v_2 = \sqrt{2}y_6$, форму I_5 приводит к каноническому виду I_5^0.

Уравнение $I_5^0 = 0$ в пространстве $R^6(y_i)$ задает квадратичный конус индекса три с точечной вершиной [4], который и выделяет искомое подмногообразие.

Обозначим через M_3 кубическую поверхность в $R^6(u_p,v_p)$ с уравнением $I_6 = 0$.

Лемма 2. M_3 является рациональной поверхностью с одной двойной точкой.

Доказательство. Найдем особые точки поверхности M_3. Для этого рассмотрим уравнения $\frac{\partial I_6}{\partial u_p} = 0$, $\frac{\partial I_6}{\partial v_p} = 0$, $p = 1,2,3$. Они дают систему

$-u_1 + 5u_2 + 5u_3 = 0$, $5u_1 - u_2 + 5u_3 = 0$, $5u_1 + 5u_2 - u_3 = 0$, $v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2 -$
$-2v_1v_3 + 8v_2v_3 = 0$, $-v_1^2 + v_2^2 - v_3^3 - 2v_1v_2 + 8v_1v_3 - 2v_2v_3 = 0$, $-v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 + + 8v_1v_2 -$

$2v_1v_3 - 2v_2v_3 = 0$. Она имеет единственное нулевое решение, поверхность M_3 содержит только одну особую точку (в начале координат).

Запишем уравнения прямых, проходящих через двойную точку поверхности M_3 в виде $u_p = v_3t_p, p = 1,2,3$; $v_1 = v_3t_4, v_2 = v_3t_5$. Найдем точки их пересечения с M_3. Они определяются уравнением

$$v_3^2(3v_3(t_4^3 + t_5^3 + 1) - 9v_3(t_4^2t_5 + t_4t_5^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_4 + t_5) + 72v_3t_4t_5) -$$
$$-2\sum u_p^2 + 20\sum_{p<q} t_pt_q = 0. \qquad (3)$$

При $v_3 = 0$ уравнение (3) дает $u_p = v_p = 0, p = 1,2,3.$. Прямая, проходящая через двойную точку поверхности M_3, пересекает ее еще в одной точке. Согласно (3), координаты этой точки

$$u_p = At_p, p = 1,2,3; v_1 = At_4, v_2 = At_5, \qquad (4)$$

где
$$A = \frac{2\sum t_p^2 - 20\sum_{p<q} t_pt_q}{3(t_4^3 + t_5^3 + 1) - 9(t_4^2t_5 + t_4t_5^2 + t_4^2 + t_5^2 + t_4 + t_5) + 72t_4t_5}.$$

Следовательно, поверхность M_3 является рациональной см. [5]. Лемма доказана.

Заметим, что при доказательстве леммы получена параметризация поверхности M_3, которая определяется уравнениями (4).

Изучим подробнее строение поверхности M_3.

Рассмотрим сечение M_3 2 - плоскостью с уравнениями $u_3 = c$, $v_p = t_p$, $p = \; = 1,2,3$. Имеем кривую, определяемую уравнением

$$2(u_1^2 + u_2^2) - 20u_1u_2 - 20c(u_1 + u_2) - 20c^2 - 3\sum t_p^3 + 9\sum_{p\neq q} t_p^2t_q - 72t_1t_2t_3 = 0 \quad . \quad (5)$$

Лемма 3. Кривая (5) задает конику гиперболического типа.

Действительно, дискриминант квадратичной формы $2(u_1^2 + u_2^2) - 20u_1u_2$ отрицательный. Значит, кривая (5) гиперболического типа. Основной определитель левой части уравнения (5) равен нулю, если $9c^2 = \sum t_p^3 - \; -3\sum_{3\neq ii} t_p^2t_q + 24t_1t_2t_3$, и тогда кривая распадается на две прямые.

В сечении M_3 2-плоскостью, заданной уравнениями $u_k = c_k$, $v_k = t_k$, $k = 2,3$, получаем кубику

$$\begin{aligned} &3v_1^3 - 9v_1^2(t_2 + t_3) - 2u_1^2 - 9(t_2^2 + t_3^2 - 8t_2t_3) + 20(c_2 + c_3)u_1 + \\ &+ 3(t_2^3 + t_3^3) - 9(t_2^2t_3 + t_2t_3^2) - 2(c_2^2 + c_3^2) + 20c_2c_3 = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Лемма 4. Кривая (6) неприводима.

В самом деле, уравнение (6) представим в виде

$(a_1v_1 + a_2u_1 + a_3)(b_1v_1^2 + b_2v_1u_1 + b_3u_1^2 + b_4v_1 + b_5u_1 + b_6) = 0$. Коэффициенты a_p, b_l найдем из системы уравнений $a_1b_1 = 0, a_1b_2 + a_2b_1 = 0,\ a_1b_3 + a_2b_2 = 0,\ a_2b_3 = 0,$

$$a_1b_4 + a_3b_1 = -9(t_2 + t_3),\ a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_2 = 0,\ a_2b_5 + a_3b_3 = -2,\ a_1b_6 + a_3b_4 = = -9(t_2^2 + t_3^2 - 8t_2t_3), a_2b_6 + a_3b_5 = 20(c_2 + c_3), a_3b_6 = 3(t_2^3 + t_3^3) - 9(t_2^2t_3 + t_2t_3^3) -$$

$-2(c_2^2 + c_3^3) + 20c_2c_3$. Из первых шести уравнений получаем $a_2 = 0, b_1 = \ = \dfrac{3}{a_1}, b_2 = b_3 = b_5 = 0$.

Подставив эти значения в седьмое уравнение, получим противоречие. Итак, кривая (6) неприводима.

Лемма 5. Кривая (6) является расходящейся параболой, причем может быть кривой любого типа (согласно классификации Ньютона).

Доказательство. Выясним тип кривой (6). Найдем ее асимптоты. Запишем уравнение асимптот в виде $v_1 = ku_1 + b$. Для определения k и b подставим u_1 в уравнение (6) и приравняем к нулю коэффициенты при старших степенях u_1. Получим систему $k^3 = 0, 18k^2b + 9k^2(t_2 + t_3) - 2 = 0$, которая противоречива. Следовательно, кривая (6) не имеет асимптот. Кривые этого типа называются расходящимися параболами [6].

Найдем особые точки кривой (6). Рассмотрим систему уравнений $\dfrac{\partial F(u_1, v_1)}{\partial u_1} = 0, \dfrac{\partial F(u_1, v_1)}{\partial v_1} = 0$, где $F(u_1, v_1) = 0$ – уравнение данной кривой. Получим следующую систему: $v_1^2 - 2v_1(t_2 + t_3) - t_2^2 - t_3^2 + 8t_2t_3 = 0$, $\quad u_1 - 5(c_2 + c_3) = \ = 0$. Дискриминант первого уравнения $2D_1$, где $D_1 = t_2^2 + t_3^2 - 3t_2t_3$. Если $D_1 < 0$, то особых точек нет. Если $D_1 \ge 0$, то $v_1 = t_2 + t_3 \pm \sqrt{2D_1}, u_1 = 5(c_2 + c_3)$. Подставив u_1 и v_1 в уравнение $F(u_1, v_1) = 0$, получаем условие, при котором точка (u_1, v_1) будет особой:

$$2(t_2^3 + t_3^3) - 6(t_2^2t_3 + t_2t_3^3) \pm \sqrt{(2t_2^2 + 2t_3^2 - 6t_2t_3)^3} - 8(c_2^2 + c_3^2) - 20c_2c_2 = 0.$$

Найдем значение $H = \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial v_1}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_1^2}$ в особой точке. Так как $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = -4$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial v_1} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v_1^2} = 72(v_1 - t_2 - t_3)$, то для точки с координатами $u_1 = 5(c_2 + c_3)$, $v_1 = t_2 + t_3 + \sqrt{2D_1}$ имеем $H = 72\sqrt{2D_1}$. При $D > 0$ функция $H > 0$, точка (u_1, v_1) узловая (см., например, [7]). Для $u_1 = 5(c_2 + c_3)$, $v_1 = t_2 + t_3 - \sqrt{2D_1}$ функция $H = -72\sqrt{2D_1}$. При $D_1 > 0$ имеем $H < 0$, и точка (u_1, v_1) изолированная. Если $D_1 = 0$, то $H = 0$, точка $u_1 = 5(c_2 + c_3)$, $v_1 = t_2 + t_3$ будет точкой возврата.

С помощью аффинного преобразования $(u_1, v_1) \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}} y + 5(c_2 + c_3), x + t_2 + t_3)$ уравнение (6) приведем к виду $y^2 = 3x^3 - 18x(t_2^2 + t_3^2 - 3t_2 t_3) - 12(t_2^3 + t_3^3 - 3(t_2^2 t_3 + t_2 t_3^2) - 4(c_2^2 + c_3^2) - 10c_2 c_3)$. Основные формы кривых этой группы определяются видом корней вспомогательного уравнения

$x^3 - 6x(t_2^2 + t_3^2 - 3t_2 t_3) - 4(t_2^3 + t_3^3 - 3(t_2^2 t_3 + t_2 t_3^2) - 4(c_2^2 + c_3^2) - 10c_2 c_3) = 0$. [6]

Итак, кривая (6) является расходящейся параболой, причем возможны следующие случаи: 1) если $-(t_2^2 + t_3^2 - 3t_2 t_3)^3 + (t_2^3 + t_3^3 - 3(t_2^2 t_3 + t_2 t_3^2) - 4(c_2^2 + c_3^3) - \quad -10c_2 c_3)^2 > 0$, то кривая представляет собой бесконечную ветвь параболического типа; 2) если $-(t_2^2 + t_3^2 - 3t_2 t_3)^3 + (t_2^3 + t_3^3 - 3(t_2^2 t_3 + t_2 t_3^2) - 4(c_2^2 + c_3^3) - 10c_2 c_3)^2 < 0$, то кривая состоит из параболической ветви и овала; 3) если $t_2^2 + t_3^2 - 3t_2 t_3 = 0$ и $t_2^3 + t_3^3 - 3(t_2^3 t_3 + t_2 t_3^2) - 4(c_2^2 + c_3^2) - 10c_2 c_3 = 0$, то кривая представляет собой параболическую ветвь, имеющую точку возврата; 4) если $t_2^2 + t_3^2 - 3t_2 t_3 > 0$ и $2(t_2^3 + t_3^3) - 6(t_2^3 t_3 + t_2 t_3^2) + \sqrt{(2t_2^2 + 2t_3^3 - 6t_2 t_3)^3} - 8(c_2^2 + c_3^2) - 20c_2 c_3 = 0$, то кривая представляет собой параболическую ветвь с узловой точкой; 5) если $t_2^2 + t_3^3 - 3t_2 t_3 > 0$ и $2(t_2^3 + t_3^3) - 6(t_2^3 t_3 + t_2 t_3^2) - \sqrt{(2t_2^2 + 2t_3^3 - 6t_2 t_3)^3} - 8(c_2^2 + c_3^2) - 20c_2 c_3 = 0$, то кривая состоит из параболической ветви и изолированной точки. Лемма доказана.

Теперь пересечем поверхность M_3 2- плоскостями, определяемыми уравнениями $u_p = c_p, p = 1,2,3; v_3 = t$. Получим кубику

$$3(v_1^2 + v_2^3) - 9(v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2) - 9t(v_1^2 + v_2^2 - 8v_1 v_2) - 9t^2(v_1 + v_2) + 3t^3 - 2\sum c_p^2 + 20\sum_{p<q} c_p c_q = 0. \quad (7)$$

Лемма 6. Кривая (7) может распадаться на прямую и конику гиперболического типа.

Доказательство. Представим уравнение (7) в виде $(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \quad + a_3)(b_1 v_1^2 + b_2 v_1 v_2 + b_3 v_1^2 + b_4 v_1 + b_5 v_2 + b_6) = 0$. Для нахождения a_p, b_l имеем систему уравнений $a_1 b_1 = 3$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = -9$, $a_1 b_3 + a_2 b_2 = -9$, $a_2 b_3 = 3$, $a_1 b_4 + a_3 b_1 = -9t$, $a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_2 = 72t$, $a_2 b_5 + a_3 b_3 = -9t$, $a_1 b_6 + a_3 b_4 = -9t^2$, $a_2 b_6 + a_3 b_5 = -9t^2$, $a_3 b_6 = 3t^3 - 2\sum c_p^2 + 20\sum_{p<q} c_p c_q$. Из уравнения $a_1 b_1 = 3$ находим $a_1 \neq 0$. Можно положить $a_1 = 1$; тогда

$$a_2 = 1, a_3 = -5t, b_1 = 3, b_2 = -12, b_3 = 3, \quad b_4 = 6t, b_5 = 6t, b_6 = 21t^2, \text{ если } t^3 = \frac{\sum c_p^2 - 10\sum_{p<q} c_p c_q}{54}.$$

При этом (7) можно записать так: $(v_1 + v_2 - 5t)(3v_1^2 - 12v_1 v_2 + 3v_2^3 + 6tv_1 + 6tv_2 + 21t^2) = 0$.

Уравнение $3v_1^2 - 12v_1v_2 + 3v_2^3 + 6tv_1 + 6tv_2 + 21t^2 = 0$ задает при $t \neq 0$ гиперболу. Действительно, инварианты левой части уравнения такие: $\delta = -27, \Delta = -729t^2$. Если $t = 0$, то указанное уравнение задает две пересекающиеся прямые. Лемма доказана.

Лемма 7. Кривая (7) является раскинутой гиперболой, причем состоит либо из трех гиперболических ветвей, либо представляет собой две гиперболические ветви и одну прямолинейную ветвь, либо – три гиперболические ветви, одна из которых имеет узловую точку.

Доказательство. Для определения типа этой кривой рассмотрим уравнение $v_1^3 + v_2^3 - 3v_1^2v_2 - 3v_1v_2^2 = 0$ относительно $\frac{v_2}{v_1}$. Это уравнение имеет корни -1, $2 \pm \sqrt{3}$. Это означает, что кривая (7) относится к типу раскинутых гипербол [6].

Найдем особые точки кривой (7). Из уравнений $\frac{\partial F(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 0$, $\frac{\partial F(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 0$, где $F(v_1, v_2)$ – левая часть (7), получим $v_1^2 - v_2^2 - 2v_1v_2 - \quad -2tv_1 + 8tv_2 - t^2 = 0$, $v_1^2 - v_2^2 + 2v_1v_2 - $ $-8tv_1 + 2tv_2 + t^2 = 0$,. Решение этой системы $v_1 = v_2 = \frac{t}{2}(3 \pm \sqrt{7})$. Подставив найденное значение в уравнение (7), получим условие, при котором точка (v_1, v_2) будет особой :

$$t^3 = \frac{19 \mp 7\sqrt{7}}{27}\left(\sum c_p^2 - 10\sum_{p<q} c_p c_q\right)$$

Найдем значение $H = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_1 \partial v_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial v_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v_2^2}$ в указанных особых точках. Функция $H = 324t^2(7 \mp 2\sqrt{7})$. При $t \neq 0$ имеем $H > 0$, точка $v_1 = v_2 = \frac{t}{2}(3 \pm \sqrt{7})$ узловая. Если $t = 0$, то $\sum c_p^2 - 10\sum_{p<q} c_p c_q = 0$. Из леммы 6 получаем, что в этом случае кривая (7) распадается на три прямые.

С помощью аффинного преобразования $(v_1, v_2) \mapsto (-x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{2}t, -x - \frac{1}{6}y + \frac{5}{2}t)$ приведем уравнение (7) к виду $xy^2 = 12x^3 - 36tx^2 - 27t^2x + 108t^3 - 2\sum c_p^2 + \; + 20\sum_{p<q} c_p c_q$. Основные формы кривых этой группы определяются видом корней вспомогательного уравнения

$$12x^4 - 36tx^3 - 27t^2x^2 + (108t^3 - 2\sum c_p^2 + 20\sum_{p<q} c_p c_q)x = 0.$$

Итак, кривая (7) является расходящейся гиперболой, причем: 1) если $-343t^6 +$ $+\left(19t^3 + \frac{1}{3}(-2\sum c_p^2 + \sum_{p<q} c_p c_q\right)^2 > 0$, то кривая состоит из трех гиперболических ветвей; 2) если $-343t^6 + \left(19t^3 + \frac{1}{3}(-2\sum c_p^2 + \sum_{p<q} c_p c_q\right)^2 < 0$, то кривая представляет собой две гиперболические ветви и одну прямолинейную;

3) если $t \neq 0$ и $t^3 = \frac{19 \mp 7\sqrt{7}}{27}\left(\sum c_p^2 - 10\sum_{p<q} c_p c_q\right)$, то кривая состоит из трех гиперболических ветвей, одна из которых имеет узловую точку. Лемма доказана.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Особое подмногообразие, определяемое инвариантом I_6, в пространстве R^6 состоит из вещественных точек, лежащих на рациональной кубической поверхности M_3 с одной двойной точкой. Поверхность M_3 устроена так: 2- плоскости $u_3 = c, v_p = t_p, p = 1,2,3$, пересекают M_3 по коникам гиперболического типа; в 2-плоскостях $u_k = c_k, v_k = t_k, k = 2,3$, могут находиться расходящиеся параболы всех типов, а 2- плоскости $u_p = c_p, v_3 = t$ пересекают M_3 либо по раскинутым гиперболам трех видов, либо по кривой, распадающейся на прямую и конику гиперболического типа.

Литература.

1. Flatto L. Invariants of finite reflection groups //Enseign. math. - 1978 - V. 24, - N3-4, - P. 234-292.
2. Игнатенко В.Ф. Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями //Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии – 1984. - Т.16. - С.195-229.
3. Игнатенко В.Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями //Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии. - 1980. - Т. 11. - С. 203-240.
4. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. - М.: Наука, 1966. - 648с.
5. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. - М.: Наука, 1972. -568 с.
6. Савелов А.А. Плоские кривые. - М.: Физматгиз, 1960. - 296 с.
7. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.: Основа, 1995. – 304 с.