УДК 517. 926

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЧЕТНОГО ЧИСЛА БЕГУЩИХ ВОЛН ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Белан Е.П.[1]

В статье рассматривается задача существования счетного числа устойчивых бегущих волн квазилинейных функционально-дифференциальных уравнений Кортевега – де Фриза, Буссинеска.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, бегущие волны, устойчивость

В работе [1] найдены условия существования счетного числа орбитально асимптотически устойчивых предельных циклов для ряда модельных задач. В частности, для квазилинейного уравнения Кортевега–де Фриза на окружности были найдены условия существования счетного числа орбитально асимптотически устойчивых 2π – периодических бегущих волн. Существование счетного числа орбитально асимптотически устойчивых π – антипериодических бегущих волн было установлено для квазилинейного уравнения Буссинеска. Качественное отличие в проблеме устойчивости бегущих волн этих модельных уравнений было установлено в цитированной выше работе.

Согласно принятой в [2] терминологии в рассмотренных в [1] динамических системах имеет место явление гипербуферности. В настоящей статье показано, что при переходе к динамических системам, порождаемых функционально-дифференциальными уравнениями, явление буферности может не сохраняться. В частности, найдены условия, обеспечивающие для функционально-дифференциального уравнения КдФ счетного числа 2π – периодических бегущих волн, ни одно из которых не является устойчивым.

Бегущие волны квазилинейного уравнения КдФ

Рассмотрим краевую задачу

$$u_t + u_{xxx} = \varepsilon f(u_h),\ u(t,x+2\pi) = u(t,x), \tag{1}$$

где $0<\varepsilon<<1$, $f\in C^\infty(R)$, $h\neq 0\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$, $u_h(t,x)=u(t,x+h)$.

Под решением задачи (1) с начальным условием $u_0(x)$, где $u_0(x)\in W_2^{\,3}$, $W_2^{\,3}$ – гильбертово пространство 2π –периодических функций, понимается решение интегрального уравнения

[1] Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

$$u(t,x)=T(t)u_0+\varepsilon\int_0^t T(t-\tau)f(u(\tau,x+h))d\tau, \tag{2}$$

где $T(t)$ – группа, порожденная в W_2^3 оператором $-d^3/dx^3$. С помощью принципа сжимающих отображений можно убедиться, что оно определено при $|t|<t_0/\varepsilon$, где $t_0=t_0(u_0)>0$ и гладко зависит от u_0, ε.

Будем интересоваться существованием и устойчивостью у краевой задачи (1) бегущих волн, т.е. периодических решений вида

$$u=v(y),\quad y=\omega t+nx,\quad n=1,2,...,$$

где 2π – периодическая функция v удовлетворяет уравнению

$$v'''+\sigma v'=\mu f(u_{nh}), \tag{3}$$

где $\sigma=\omega/n^3$, $\mu=\varepsilon/n^3$.

При построении периодического решения $v(y,\mu,n)$ уравнения (3) используем метод усреднения [3, 4]. Положим в уравнении (3) $\sigma=1+\mu\tilde{\sigma}$ и перейдем от переменных (v,v',v'') к переменным (c,ξ,τ) согласно равенств

$$v=c+\xi\cos\tau,\quad v'=-\xi\sin\tau,\quad v''=-\xi\cos\tau. \tag{4}$$

Полученной системе дифференциально-разностных уравнений сопоставим усредненную систему

$$c'=\mu M[f(c+\xi\cos(\tau+nh))],\quad \xi'=-\mu M[f(c+\xi\cos(\tau+nh))]\cos\tau,$$
$$\tau'=1+\frac{\mu}{\xi}(\mathrm{M}[\mathrm{f}\ (\mathrm{c}+\xi\cos(\tau+nh))\sin\tau]+\tilde{\sigma}\frac{\xi}{2}), \tag{5}$$

где $M[\ \ ]$ – среднее значение по τ. Обозначим

$$\psi(c,s)=M[f(c+\sqrt{s}\cos\tau)],\quad \varphi(c,s)=-M[f(c+\sqrt{s}\cos\tau)\cos\tau]/\sqrt{s}. \tag{6}$$

Предположим, что система

$$\psi(c,s)=0,\quad \varphi(c,s)=0 \tag{7}$$

имеет решение (c_0,s_0), $s_0>0$, причем отвечающая ему матрица

$$A=\begin{pmatrix}\psi'_c(c_0,s_0) & \varphi'_c(c_0s_0)\\ \psi'_s(c_0,s_0) & \varphi'_s(c_0s_0)\end{pmatrix} \tag{8}$$

такова, что

$$\det A\neq 0,\quad sp\,A\neq 0. \tag{9}$$

Зафиксируем $\delta>0$. Предположим, что n удовлетворяет условию

$$|\cos nh|>\delta. \tag{10}$$

Из [4] следует, что уравнение (3) имеет периодическое решение $v(y,\mu,\tilde{\sigma},n)$ периода

$T(\mu,\tilde{\sigma},n)=2\pi[1+\mu\Delta(\mu,\tilde{\sigma},n)]$, где гладкая по $(\mu,\tilde{\sigma})$ функция Δ такова, что

$$\Delta(0,0,n)=0,\quad \Delta_{\tilde\sigma}(0,0,n)=-1/2. \tag{11}$$

Равенства (11), являющиеся следствием третьего уравнения системы (5) и выбора (c_0, s_0), позволяют определить имеющийся в запасе параметр $\tilde\sigma=\tilde\sigma(\mu,n)$ из уравнения $\Delta(\mu,\tilde\sigma,n)=0$. Полагая

$$v(y,\mu,n)=v(y,\mu,\tilde\sigma,n)\,|_{\tilde\sigma=\tilde\sigma(\mu,n)},\quad \sigma(\mu,n)=1+\tilde\sigma(\mu,n),$$

получаем искомые функции. Таким образом доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (7) *имеет решение* (c_0, s_0), $s_0>0$, *удовлетворяющее условиям* (9). *Тогда для любого целого* n, *удовлетворяющего условию* (10), *найдется такое* $\mu_0, \mu_0=\mu_0(n)$ $(\mu_0(n)<\varepsilon_0/n,$ ε_0 не зависит от n), *что при всех* $0<\mu<\mu_0$ *ему отвечает единственная пара достаточно гладких функций*

$$\{v,\sigma:\quad v(y+2\pi,\mu,n)=v(y,\mu,n),\ v(y,0\,n)=c_0+\sqrt{s_0}\cos y,\ \sigma(0,n)=1\},$$

обращающих уравнение (3) *в тождество.*

Итак, построено счетное число бегущих волн уравнения (1) вида

$$u=v(y,\varepsilon/n^3,n),\quad y=n^3\sigma(\varepsilon/n^3,n)+nx, \tag{12}$$

где целые $n>0$ удовлетворяют условию (10), а $v(y,\mu,n)$, $\sigma(\mu,n)$ определены в теореме 1.

Теорема 2. *Циклы* (12) *краевой задачи* (1) *неустойчивы.*

Для доказательства теоремы линеаризуем краевую задачу (1) на цикле (12) и перейдем к новой пространственной переменной y. За устойчивость цикла отвечает расположение спектра задачи

$$-z'''(y)-\sigma z'(y)+\mu a(y,\mu)z(y+nh)=\lambda z(y),\quad z(y+2\pi n)=z(y), \tag{13}$$

где $a(y,\mu)=f'(v(y+nh,\mu))$. При $\mu=0$ спектр задачи (13) – это собственные числа

$$i(k/n)^3-i\sigma(\mu)k/n,\quad k=0,\pm1,\ldots, \tag{14}$$

которым отвечают собственные функции $\exp(iky/n)$. Выполним в (13) замену

$$z\exp(-iky/n)\to z,\quad \lambda-i(k/n)^3+i\,\sigma(\mu)k/n\to\lambda. \tag{15}$$

В результате проблема сводится к нахождению собственного числа

$\lambda=\lambda(k/n,\mu)$, $\lambda(k/n,0)=0$ и собственной функции $z(y,\dfrac{k}{n},\mu), z(y,\dfrac{k}{n},0)=1$

вспомогательной спектральной задачи

$$-z'''(y)-3i\alpha z''(y)+3\alpha^2z'(y)a(y,\mu)z(y+nh)=\lambda z(y),\ z(y+2\pi n)=z(y), \tag{16}$$

где $\alpha=k/n$. Для доказательства теоремы рассмотрим задачу (16) при

$$k/n\in R\setminus\bigcup_{k=-1}^{1}(-\Delta\sqrt{\mu}+k,\Delta\sqrt{\mu}+k), \tag{17}$$

где выбором постоянной $\Delta > 0$ распорядимся позже. Для построения асимптотики собственного числа $\lambda(k/n, \mu)$ подставим в (16) ряды $\lambda = \mu\lambda_1 + \ldots$, $z = 1 + \mu z_1(y, k/n) + \ldots$. В результате для нахождения z_1 получаем уравнение

$$-(z_1)''' - 3i\alpha(z_1)'' + (3\alpha^2 - 1)(z_1)' = \lambda_1 - \exp(ikh)\,a(y,0), \tag{18}$$

разрешимое в классе $2\pi n$-периодических функций при

$$\lambda_1 = M[\exp(ikh)a(y,0)]. \tag{19}$$

Подставляя λ_1 в (18), определяем функцию $z_1(y,k/n)$, $z_1(y + 2\pi n, k/n) = z_1(y, k/n)$, $M[z_1] = 0$.

Завершает доказательство теоремы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого* $\Delta \in (\Delta_0, \infty)$, *где* $\Delta_0 > 0$ *достаточно велико, найдется такое* $\mu_0 = \mu_0(\Delta) > 0$, *что при* $0 < \mu < \mu_0$ *и при условии* (17) *для собственного числа* $\lambda(k/n, \mu)$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda(k/n, \mu) = \mu M[\exp(ikh)a(y,0)] + \mu\, q(k/n, \mu),$$

где функция q *удовлетворяет оценке* $|q| < N/\Delta^2$ с *независящей от* μ, k/n, Δ *постоянной* N.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 2. 1 в [1].

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$M[a(y,\mu)] = -2s_0(2s_0 - 1)^{-1}\,\mathrm{sp}\,A,$$

где A *– матрица* (8).

Для доказательства леммы достаточно проверить соотношение

$$\psi_c(c_0, s_0) = -2s_0\varphi_s(c_0, s_0).$$

Для его доказательства используем формулы (6), из которых с учетом равенства $\varphi(c_0, s_0) = 0$ выводим

$$\psi_c(c_0, s_0) + 2s_0\varphi_s(c_0, s_0) = M[f'(c_0 + \sqrt{s_0}\cos\tau)\sin^2\tau] =$$

$$-M[\sin\tau\, f_\tau(c_0 + \sqrt{s_0}\cos\tau)]/\sqrt{s_0} = M[\sin\tau\, f(c_0 + \sqrt{s_0}\cos\tau)\cos\tau]/\sqrt{s_0} = 0.$$

Заметим, что при $s_0 = 1/2$ $\mathrm{sp}\,A = 0$.

Бегущие волны уравнения Буссинеска

Рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} - a^2 u_{xxtt} = \varepsilon(u_h^3/3 - u_h)_{xxt}, \qquad u(t, x + \pi) = -u(t,x), \tag{20}$$

где $0 < \varepsilon << 1$, $h \neq 0$. В качестве её фазового пространства возьмем $W_2^2 \times W_2^2$, где W_2^2 – соболевское пространство π – антипериодических функций.

Рассуждая аналогично [1], можно убедиться в локальной однозначной разрешимости отвечающей (20) смешанной задачи.

Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости у краевой задачи (20) периодических решений вида

$$u = v(y), \quad y = \omega t + (2n+1)x, \quad v(y+\pi) = -v(y), \quad n = 0, \pm 1, \dots \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (20), для определения функции $v'' = z$ получаем уравнения

$$z'' + \mu((z^2 - 1)z')_{(2n+1)h} + \sigma z = 0, \qquad (22)$$

где $\mu = \varepsilon/(a^2\omega)$, $\sigma = ((2n+1)^2 - \omega^2)/(a^2\omega^2(2n+1)^2)$. Отметим, что (22) при $h = 0$ - известное уравнение Ван дер Поля, свойства которого хорошо изучены [3].

Методы [3] применимы и в случае $h \neq 0$ (см. [4]). В частности, единственным образом определяется такая функция $\sigma_n(\mu)$: $\sigma_n(0) = 1$, $\sigma_n'(0) = 0$, что при $\sigma = \sigma_n(\mu)$ задача (20) имеет π – антипериодическое решение
$z_n(y,\mu)$, $z_n(y,0) = 2\cos y$.

Определим из уравнения

$$((2n+1)^2 - \omega^2)/(a^2\omega^2(2n+1)^2) = \sigma_n(\varepsilon/(a^2\omega))$$

частоты

$$\omega_n(\varepsilon) = \omega_n + O(\varepsilon), \quad \omega_n = (2n+1)/\sqrt{a^2(2n+1)^2 + 1}, \quad n = 0, \pm 1, \dots .$$

Согласно [4] периодическое решение $z_n(y,\mu)$ уравнения (22) существует для каждого n при соответствующем выборе $\mu = \mu_n$. Требование на μ_n приводит к условию $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, что это условие ($\varepsilon_n = O(1/n^2)$) является достаточным. В этой связи вопрос о существовании счетного числа π – антипериодических по x бегущих волн задачи (20) при фиксированном ε является открытым.

Предыдущие рассуждения приводят к теореме.

Теорема 3. *Для всякого фиксированного* n *существует такое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n) > 0$, *что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *задача* (20) *имеет* $2(n+1)$ *бегущих волн*

$$u = v_s(y, \varepsilon/(a^2\omega_s(\varepsilon))), y = \omega_s(\varepsilon)t + (2n+1)x, v_s(y,0) = 2\cos y, s = 0, \pm 1, \dots n. \qquad (23)$$

Для исследования устойчивости цикла v_0 рассмотрим краевую задачу

$$w_{tt} - w_{xx} - a^2 w_{xxtt} = \varepsilon(v_0^2(\omega_0 t + x + h, 0)w_h - w_h)_{xxt}, \qquad w(t, x+\pi) = -w(t,x),$$

получающуюся из (20) при линеаризации на приближенном периодическом решении и отбрасывании членов порядка малости ε^2 и выше. Следуя [1], положим

$$w = [w_{m,0}(t, x) + \varepsilon\, w_{m,1}(t, x)] \exp(\varepsilon \mu_m t),$$

$$w_{m,0}(t, x) = \exp(i(\omega_m t + (2m+1)x)).$$

В результате для определения $w_{m,1}$ получаем краевую задачу

$$(w_{m,1})_{tt} - (w_{m,1})_{xx} - a^2 (w_{m,1})_{xxtt} =$$
$$= (v_0{}^2 (\omega_0 t + x + h, 0)(w_{m,1})_h - (w_{m,1})_h)_{xxt} - 2\mu_m ((w_{m,1})_t - a^2 (w_{m,1})_{xxt}),$$
$$(w)_{m,1}(t, x+\pi) = -(w)_{m,1}(t,x).$$

Отсюда, действуя обычным образом, находим

$$\mu_m = -(2m+1)^2 (2(1+a^2m^2))^{-1} \exp i(2m+1)h.$$

При соответствующем выборе m можно обеспечить неравенство $\mathrm{Re}\,\mu_m > 0$. Следовательно, цикл v_0 является неустойчивым. Рассуждая аналогично относительно решений v_s $s = \pm 1, \ldots, \pm n$ приходим к следующей

Теорема 4. *Циклы* (23) *краевой задачи* (20) *неустойчивы.*

Список литературы

1. Колесов А.Ю. *Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией.* // Изв. РАН сер. мат.,– 1995, т. 59, №3, С. 141–158.

2. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. *Явление параметрической буферности в системах параболических и гиперболических уравнений.* // Укр. мат. ж.,– 1998, т. 50, №1, С. 22-35.

3. Боголюбов Н. Н.. Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука. 1963, 410 с.

4. Белан Е.П. *Глобальные решения и инвариантные торы дифференциально-разностных уравнений.* // Укр. мат. ж.,– 1997, т. 49, №1, С. 11–24.

Анотація

Белан Е. П. Існування лічильного числа бігучих хвиль функціонально-диференціальних рівнянь// Вчені записки ТНУ, 2000, 99, No.1

У роботі розглянута задача існування рахункового числа стійких хвиль, що біжать, квазілінійних функціонально-диференціального рівнянь Кортевега-де Фріза, Бусінеска.

Ключеві слова: функціонально-диференціальні рівняння, хвилі, що біжать. стійкість.

Summary

Belan E. P. Existence of countable many running waves of functional-differential equations// Uchenye zapiski TNU, 2000, 99, No.1,

The problem of existence of countable many running stable waves for Corteveg-de Fris and Bussinesque quasilinear functional-differential equations is considered.

Keywords: functional-differential equation, running wave, stability.