СТРОЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП КОСЫХ СИММЕТРИЙ

Игнатенко В. Ф., доктор физико-математических наук, профессор,

Плышевская С. П., ассистент

Пусть G суть дикая группа симметрий, действующая в вещественном пространстве E^m; μ_j-плоскости Π^{μ_j} $(j=\overline{0,p})$ – линейные оболочки бесконечных $G(\bar{u})$-орбит направлений симметрии $\bar{u}$. Тогда $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$, где $\bar{u} \nparallel \Pi^{\gamma_0}$ [1]. Будем считать $d_j = 1$ и $\gamma_0 \geq \ldots \geq \gamma_p$. Обозначим через F_n вещественную алгебраическую (m-1)-мерную поверхность порядка n, инвариантную относительно группы G. Выделим из работы [2] следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\dim \sum_k \Pi^{\gamma_k} = \sum_k \gamma_k$ $(k = 0, 1, 2)$, причём Π^{γ_3} имеет нулевое пересечение с суммой любых двух из γ_k-плоскостей Π^{γ_k}. Тогда расположение Π^{γ_j} может быть произвольным, а именно: при любом расположении Π^{γ_j} существует поверхность F_n с некоторой группой G, не допускающей расширения.

В настоящей работе изучаются группы G, соответствующие условиям этой теоремы.

$\mathbf{1^0}$. Введем следующие обозначения: $\gamma_0 = \lambda$, $\gamma_1 = \mu$, $\gamma_2 = \nu$, $\gamma_3 = \sigma$; $\Pi^r = \sum_k \Pi^{\gamma_k}$, $\Pi^\upsilon = \Pi^\sigma \cap \Pi^r$; положим $\sigma = \upsilon$, $r_1 = \lambda + \mu$. Зададим в пространстве E^m декартову систему координат $Oy_1 \ldots y_4\ z_1 \ldots z_r\ x_1 \ldots x_q$ $(m = r + q + 4)$ согласно требованиям перестроечного метода, см. [2], [3]. Рассмотрим группу G, действующую на поверхности F_n с уравнением

$$R(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i) + S(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \varsigma_j z_{\lambda+j}) + T(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \chi_k z_{r_1+k}) + P y_4^2 = c, \quad (1)$$

где многочлены R, S, T, P и линейные функции ξ_i, ς_j, χ_k зависят только от x_ω $(\omega = \overline{1,q})$. При этом $\Pi^{\mu_0} = \Pi^1(y_1) \oplus \Pi^\lambda(z_i)$, $\Pi^{\mu_1} = \Pi^1(y_2) \oplus \Pi^\mu(z_{\lambda+j})$, $\Pi^{\mu_2} = \Pi^1(y_3) \oplus \Pi^\nu(z_{r_1+k})$, $\Pi^{d_4} = \Pi^1(y_4)$.

Метод исследования групп G предполагает задание υ-плоскости Π^υ в Π^r уравнениями вида

$$z_{\upsilon+\varepsilon} = 0, \qquad \varepsilon = \overline{1, \lambda - \upsilon},$$

$$z_{\lambda+j} = \sum_{p=1}^{\upsilon} b_{jp} z_p, \quad j = \overline{1,\mu}, \quad (2)$$

$$z_{r_1+k} = \sum_{p=1}^{\upsilon} c_{kp} z_p, \qquad k = \overline{1,\nu}.$$

Поместив новые оси Oz'_p ($p = \overline{1,\upsilon}$) в Π^{υ}, на основании (2) получим такое преобразование координат:

$$z_i = z'_i, \quad i = \overline{1,\lambda},$$
$$z_{\lambda+j} = z'_{\lambda+j} + \sum_{p=1}^{\upsilon} b_{jp} z'_p, \qquad j = \overline{1,\mu}, \tag{3}$$
$$z_{r_1+k} = z'_{r_1+k} + \sum_{p=1}^{\upsilon} c_{kp} z'_p, \quad k = \overline{1,\nu}.$$

Подействовав преобразованием (3) на уравнение (1) поверхности F_n, получим

$$R(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\upsilon} \xi_{\upsilon+\varepsilon} z'_{\upsilon+\varepsilon}) + S(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu} \varsigma_j z'_{\lambda+j}) +$$
$$T(y_3^2 + \sum_{k=1}^{\nu} \chi_k z'_{r_1+k}) + P(y_4^2 + \sum_{p=1}^{\upsilon} \kappa_p z'_p) = c, \tag{4}$$

где κ_p есть линейные функции от x_ω, удовлетворяющие соотношениям:

$$R\xi_p + S\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\varsigma_j + T\sum_{k=1}^{\nu} c_{kp}\chi_k = P\kappa_p, \qquad p = \overline{1,\upsilon}. \tag{5}$$

Пусть в (4) функции

$$\kappa_p = \lambda_1^{-1}\xi_p = \lambda_2^{-1}\sum_{j=1}^{\mu} b_{jp}\varsigma_j = \lambda_3^{-1}\sum_{k=1}^{\nu} c_{kp}\chi_k, \qquad p = \overline{1,\upsilon}, \tag{6}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – вещественные параметры. Тогда из (5) находим [2]

$$P = \lambda_1 R + \lambda_2 S + \lambda_3 T. \tag{7}$$

Функции κ_p, удовлетворяющие формулам вида (6), будем называть функциями основного типа (ФОТ).

2^0. Пусть $\upsilon = 3$ и $\kappa_p \notin$ ФОТ. Соотношения (5) перепишем так:

$$R\xi_p + SA_p + TB_p = P\kappa_p, \quad p = 1, 2, 3; \tag{8}$$

обозначения A_p и B_p ясны из сравнения (5) и (8). Рассмотрим (8) как систему трёх линейных уравнений относительно переменных $\frac{R}{P}$, $\frac{S}{P}$, $\frac{T}{P}$. Основной определитель $\Delta = \xi_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \xi_2(A_3B_1 - A_1B_3) + \xi_3(A_1B_2 - A_2B_1)$. Пусть

$$\Delta_1 = \kappa_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \kappa_2(A_3B_1 - A_1B_3) + \kappa_3(A_1B_2 - A_2B_1),$$
$$\Delta_2 = \xi_1(\kappa_2B_3 - \kappa_3B_2) + \xi_2(\kappa_3B_1 - \kappa_1B_3) + \xi_3(\kappa_1B_2 - \kappa_2B_1),$$
$$\Delta_3 = \xi_1(A_2\kappa_3 - A_3\kappa_2) + \xi_2(A_3\kappa_1 - A_1\kappa_3) + \xi_3(A_1\kappa_2 - A_2\kappa_1).$$

Функции ξ_p, A_p, B_p, κ_p ($p=1, 2, 3$) считаем такими, что $\Delta \cdot \Delta_p \not\equiv 0$. В общем случае определители Δ_p $(1 \le p \le 3)$ и Δ общего множителя не имеют. Значит, справедлива

Лемма 1. Если $\upsilon = 3$ и $\kappa_p \notin$ ФОТ ($p=1, 2, 3$), то в общем случае многочлены R, S, T, P являются кубическими формами Δ_p, Δ соответственно.

3^0. Пусть $\upsilon \ge 3$ и только две из функций κ_p $(p=\overline{1,\upsilon})$ – для определённости, κ_s $(s=1, 2)$ – не принадлежат ФОТ. Будем считать в (8) $p=\overline{1,\upsilon}$. По предположению для функций κ_t $(t=\overline{3,\upsilon})$ выполняются формулы (6). Следовательно, соотношения (8) при $p=s=1, 2$ и (7) дают систему уравнений относительно $\frac{R}{P}, \frac{S}{P}, \frac{T}{P}$.
Пусть

$$\delta = \lambda_1(A_1B_2 - A_2B_1) + \lambda_2(\xi_2B_1 - \xi_1B_2) + \lambda_3(\xi_1A_2 - \xi_2A_1),$$
$$\delta_1 = \kappa_1(\lambda_3A_2 - \lambda_2A_3) + \kappa_2(\lambda_2B_1 - \lambda_3A_1) + A_1B_2 - A_2B_1,$$
$$\delta_2 = \xi_1(\lambda_3\kappa_2 - B_2) + \xi_2(B_1 - \lambda_3\kappa_1) + \lambda_1(\kappa_1B_2 - \kappa_2B_1),$$
$$\delta_3 = \xi_1(A_2 - \lambda_2\kappa_2) + \xi_2(\lambda_2\kappa_1 - A_1) + \lambda_1(A_1\kappa_2 - A_2\kappa_1).$$

Строение многочленов δ и δ_p ($p=1, 2, 3$) существенно зависит от выбора параметров λ_p в формулах (6). Имеет место аналогичная лемме 1

Лемма 2. Если $\upsilon \ge 3$ и только $\kappa_s \notin$ ФОТ ($s=1, 2$), то в общем случае многочлены R, S, T, P являются квадратичными формами δ_p, δ соответственно.

4^0. Пусть только κ_1 не удовлетворяет формулам (6), $\kappa_1 \notin$ ФОТ ($\upsilon > 1$). Тогда для нахождения $\frac{R}{P}, \frac{S}{P}, \frac{T}{P}$ имеем систему двух уравнений (7) и (8), $p=1$; пространство свободных переменных одномерно. Согласно (7),

$$R(\xi_1 - \lambda_1\kappa_1) + S(A_1 - \lambda_2\kappa_1) + T(B_1 - \lambda_3\kappa_1) = 0. \tag{9}$$

Лемма 3. Если $\upsilon > 1$ и только $\kappa_1 \notin$ ФОТ, то строение κ_1 и R, S, T определяет формула (9).

Отметим, что лемма 3 по существу содержится в [2].

5^0. Рассмотрим теперь случай, когда функции $\kappa_p \notin$ ФОТ ($p=1, 2, 3$) – и только они ($\upsilon > 3$). Строение многочленов R, S, T, P выделяет пункт 2^0. Поскольку $\upsilon > 3$, многочлен P находится по формуле (7). Следовательно, имеем аналог (9), т.е.

$$R(\xi_p - \lambda_1\kappa_p) + S(A_p - \lambda_2\kappa_p) + T(B_p - \lambda_3\kappa_p) = 0, \qquad p=1, 2, 3. \tag{10}$$

Если система (10) относительно переменных R, S, T имеет ненулевое решение, то её основной определитель равен нулю. При этом (10) допускает бесконечное множество решений.

Согласно п. 2^0, многочлены R, S, T, P равны $\Delta_p = H\Delta'_p$, $\Delta = H\Delta'$, где $\deg H \geq 0$. В общем случае $H = 1$. При этом R, S, T, P находятся однозначно. Так как $\kappa_4 \in$ ФОТ, то формула (7) принимает вид

$$\Delta = \sum_p \lambda_p \Delta_p, \; p = 1, 2, 3. \qquad (11)$$

Следовательно, параметры λ_p в (6) произвольными быть не могут – они должны удовлетворять соотношению (11). Поэтому справедлива

Лемма 4. Если три функции из $\{\kappa_p; p = \overline{1,\upsilon}\}$ не удовлетворяют формулам (6), то при $H = 1$ и произвольных параметрах λ_p случай $\upsilon > 3$ невозможен.

В известном смысле соотношение (11) будет характеристическим для таких групп G, что $H = 1$, $\kappa_p \notin$ ФОТ ($p = 1, 2, 3$) и $\upsilon > 3$.

На основании лемм 1-4 имеет место

Теорема 2. В уравнении (4) поверхности F_n при $H = 1$ функции κ_p ($p = \overline{1,\upsilon}$) могут иметь одно из следующих строений: 1) $\upsilon = 1$; функция κ_1 произвольна; 2) $\upsilon \geq 3$ и κ_p ($p = 1, 2, 3$) не удовлетворяют (6); при $\upsilon > 3$ выбор λ_p ограничен соотношением (11); 3) $\upsilon \geq 3$ и только две из функций κ_p ($p = \overline{1,\upsilon}$) не удовлетворяют (6); 4) $\upsilon \geq 2$; либо все κ_p, либо $\upsilon - 1$ из них находятся по формулам (6).

Работа поддержана Миннауки Украины, грант 1.4/121.

Литература

1. Игнатенко В. Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии – М.: ВИНИТИ АН СССР. – 1989. – Т.21. – С.155-208.
2. Ignatenko V. F. Algebraic Surfaces with an Infinite Set of Skew Symmetry Planes. Mutual Arrangement of Linear Spans of Four Orbits of Symmetry Directions // Amer. Math. Soc. Transl. (2). – 1996. – V.176. – P.27-51.
3. Игнатенко В. Ф. О современном состоянии теории инвариантов бесконечных групп косых симметрий // Труды матем. ф-та. Изд-во СГУ, Симферополь. – 1997. – С.54-56.