ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Москалева Ю. П., ассистент

В различных областях физики часто возникает необходимость решения задач теории рассеяния. Основным результатом настоящей статьи является описание волновых операторов одного класса несамосопряженных операторов, а именно — диссипативных, вообще говоря, неограниченных операторов класса K^r без невещественного спектра и существенной особенности в бесконечности.

Замкнутый оператор A со всюду плотной в H областью определения $D(A)$ называется K^r-оператором, если $A|L$ — эрмитов оператор с индексом дефекта (r,r) и $\rho\,(A) \neq \varnothing$. При этом область эрмитовости определяется следующим образом

$$L = \{f \in D(A) | (Af,g) = (f,Ag),\ \forall g \in D(A)\}.$$

Характеристической матрицей-функцией диссипативного K^r-оператора называется матрица-функция $W_A\,(\lambda\,)$, удовлетворяющая равенству

$$W_A\,(-i\,) W_A\,(\lambda\,) = I - i(\lambda - i)\left\| ((A+iI)(A-\lambda I)^{-1} g_k, g_\alpha) \right\|,$$

где $W_A\,(-i\,)$ — неотрицательная матрица, а $\{g_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ — α-базис. В свою очередь, система векторов $\{g_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ называется α-базисом оператора A, если для вспомогательного оператора

$$B = i\,R_{-i} - i\,R_{-i}^{*} - 2\,R_{-i}\ R_{-i}^{*}$$

имеет место представление

$$Bf = \sum_{k,\alpha=1}^{r} (f, g_k) g_\alpha\,.$$

В случае, когда диссипативный K^r-оператор является оператором без невещественного спектра и существенной особенности в бесконечности, его характеристическая матрица-функция $W_A(\lambda\,)$ имеет следующее мультипликативное представление

$$W_A(\lambda\,) = U \times \overset{\rightarrow}{\int_0^l} \exp\left[-i \frac{1+\lambda\,\alpha\,(t)}{\alpha\,(t) - \lambda} p^2(t)\,dt \right] \times U^{*}\,,$$

где U — унитарная матрица; $p(t)$ — эрмитова матрица, такая что $\operatorname{Sp} p^2(t) \equiv 1$.

Почти для всех $\sigma \in [0,l]$, при условии суммируемости матрицы-функции

$$B^2(t) = \frac{\alpha^2(t)+1}{\alpha'(t)} p^2(t)$$

уществуют предельные значения характеристической матрицы-функции

$$W^{\pm}(\sigma) = \underset{\tau \to +0}{\text{s-}\lim} W(\lambda), \qquad \lambda = \sigma \pm i\tau ,$$

и имеют место формулы

$$W^{\pm}(\sigma) = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{s-}\lim} \overrightarrow{\int\limits_{0}^{\gamma(\sigma-\varepsilon)}} \exp\left(-i\frac{1+\sigma\alpha(t)}{\alpha(t)-\sigma} p^2(t)\,dt\right) \times$$

$$\times \exp\left(\pm\pi B^2(\gamma(\sigma))\right) \times \overrightarrow{\int\limits_{\gamma(\sigma+\varepsilon)}^{l}} \exp\left(-i\frac{1+\lambda\alpha(t)}{\alpha(t)-\lambda} p^2(t)\,dt\right).$$

Рассмотрим треугольную модель диссипативного K^r-оператора без невещественного спектра и существенной особенности в бесконечности [1].

$$\vec{A} f = \alpha(x) f(x) + i\int\limits_0^x f(t)\sigma(t)\, dt\, \sigma^*(x), \quad f \in L_r^2(0,l),$$

где $\sigma(x) = (\alpha(x) + i)\, p(x) w(x)$, $w(x) = \overleftarrow{\int\limits_0^x} \exp(-i\alpha(t)\, p^2(t)\, dt$.

Преобразование Кэли $\vec{T} = I - 2iR_{-i}(\vec{A})$ является неунитарным определенным на всем пространстве ограниченным оператором.

Определим для неунитарного ограниченно обратимого оператора T характеристическую матрицу-функцию $w_T(\mu)$ следующим равенством:

$w_T(0) w_T(\mu) = I - \left\|((I - \mu T)^{-1}\gamma_k, \gamma_\alpha)\right\|$, где $w_T(0)$ — неотрицательная матрица, $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ — система каналовых векторов оператора T.

Система векторов $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ называется каналовой для оператора T, если имеет место равенство

$$(I - T^*T) f = \sum_{k,\alpha=1}^{r} (f, \gamma_k)\gamma_\alpha .$$

Матричное равенство

$$I - i(\lambda - i)\left\|((A + iI)(A - \lambda I)^{-1} g_k, g_\alpha)\right\| = I - 2\left\|((I - \mu T)^{-1} g_k, g_\alpha)\right\|,$$

где $\mu = \dfrac{\lambda + i}{\lambda - i}$ и равенство

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{pmatrix} = \sqrt{2}\, w_{\vec{T}}(0) \begin{pmatrix} \vec{T}^{-1} g_1 \\ \vec{T}^{-1} g_2 \\ \vdots \\ \vec{T}^{-1} g_r \end{pmatrix},$$

устанавливающее связь между α-базисом $\{g_\alpha\}_{\alpha=1}^{r}$ оператора $\vec{A}$ и системой каналовых векторов $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha=1}^{r}$ оператора $\vec{T}$, позволяют получить равенство

$$w_T(\mu) = W_A(\lambda)\ .$$

В работе [2] определяется класс операторов E_1, класс неунитарных ограниченно обратимых операторов, подобных некоторому унитарному оператору с абсолютно непрерывным спектром, для которых существуют вместе с обратными операторы

$$W_\pm(T^{*-1},T) = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} T^{*\,t}\,T^{t}\,.$$

Оператор $\vec{T}$ преобразования Кэли треугольной модели диссипативного оператора класса K^r без невещественного спектра и существенной особенности в бесконечности подобен оператору $U=(Q-i)/(Q+i)$, где оператор Q — это оператор умножения на $\alpha(\sigma)$ [3]. Это позволяет говорить о существовании пределов

$$W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty}(I+2iR^*_{-t})^t(I-2iR_{-t})^t\,,$$

которые выписываются в терминах предельных значений матрицы-функции $w_T\left(\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)$, что с учетом равенства характеристических функций $w_T(\mu)$ и $W_A(\lambda)$ означает, что волновые операторы

$$\text{s-}\lim_{t\to\pm\infty}(I+2iR^*_{-t})^t(I-2iR_{-t})^t$$

можно выписать с учетом приведенных выше предельных значений характеристической матрицы-функции оператора класса K^r

$$W_\pm = K^{1/2}V_\pm K^{1/2}, \qquad Kf = f(x)\,L(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{F(t)\,F(x)}{x-t}\,dt\,, \qquad f\in L^2_r(-\infty,+\infty)\,,$$

$$V_\pm(x) = L(x) \mp \frac{1}{2}F^2(x), \qquad F(x) = (R(x)-R^{-1}(x))^{1/2}\,,$$

$$L(x) = I + \frac{1}{2}F(x)(R(x)-I)(R(x)+I)^{-1}F(x)\,.$$

$R^{\pm1}(x)$ — положительные компоненты полярного представления $W^{\pm}(\sigma)$ — предельных значений характеристической матрицы-функции оператора класса K^r. Формулы для $R^{\pm1}$ в терминах мультипликативного представления имеют вид

$$R^{\pm 1}(x) = \left[W^{\pm}(x)\,W^{\pm}(x)^{*}\right]^{1/2} = \mathrm{s}\text{-}\lim_{\varepsilon \to +0}\left[\overrightarrow{\int_{0}^{\gamma(x-\varepsilon)}} \exp\left(-i\,\frac{1+x\alpha(t)}{\alpha(t)-x}\,p^{2}(t)\,dt\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left(\pm\pi\, B'(\gamma\ (x))\right) \times \left[\overrightarrow{\int_{0}^{\gamma(x-\varepsilon)}} \exp\left(-i\,\frac{1+x\alpha(t)}{\alpha(t)-x}\,p^{2}(t)\,dt\right)\right]^{-1}.$$

Литература.

1. А. В. Кужель О приведении неограниченных самосопряженных операторов треугольному виду. // Докл. АН СССР. — Т. 119, № 5. — 1958 г. — С. 868-871.

2. А. Л. Сахнович Операторы, подобные унитарным, с абсолютно непрерывным спектром.// Функц. анализ и его приложения. — Т. 2, вып. 1. — 1968 г. — С. 52-63.

3. Ю. П. Москалева К вопросу о подобии несамосопряженных диссипативных операторо Труды Крымской осенней математической школы. Выпуск 4. — 1995 г. — С. 42-43.