Ученые записки. № 13. Том 2.
Биология. Математика. Физика. Химия.

УДК 517.9:532

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Вронский Б. М.[1]

Рассмотрена задача о малых движениях и собственных колебаниях сжимаемой стратифицированной жидкости, целиком заполняющей ограниченный сосуд произвольной формы.

Рассмотрим трехмерную область Ω, заполненную идеальной сжимаемой устойчиво стратифицированной жидкостью. Малые движения изучаемой системы описываются следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями (см. 1):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0(z)}(\nabla p + g\rho\vec{k}) \ (\text{в } \Omega) \qquad (1)$$

$$\rho + w_z\,\rho'_0 + \rho_0\,\nabla\cdot\vec{w} = 0 \ (\text{в } \Omega), \qquad (2)$$

$$\rho + w_z\,\rho'_0 = c^{-2}(p - g\rho_0\,w_z) \ (\text{в } \Omega), \qquad (3)$$

$$\vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{в } \Omega). \qquad (4)$$

$$\vec{w}(\vec{x},0) = \vec{w}^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial\vec{w}(\vec{x},0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \qquad (5)$$

Условие устойчивой стратификации означает, что выполнено неравенство:
$0 < N_-^2 < N^2(z) < N_+^2 < +\infty$,

где
$$N^2(z) = N_0^2(z) - (g/c)^2,$$

$$N_0^2(z) = -g\frac{\rho'_0(z)}{\rho_0(z)}.$$

Выражение $N_0^2(z)$ называется квадратом частоты плавучести.

В дальнейшем мы будем рассматривать собственные колебания системы, то есть решения задачи (1)—(4), зависящие от времени по закону exp(iωt). С помощью метода ортогонального проектирования (см.2) исследуемая спектральная задача приводится к задаче на собственные значения для матричного операторного пучка следующего вида :

[1] Кафедра математического анализа

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}+B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda = \omega^2. \quad (6)$$

Здесь оператор-матрица $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ неотрицателен и норма его равна

$N_0^2 = \max N_0^2(z)$.

1. Сначала рассматриваются значения параметра $\lambda \in (N_0^2; +\infty)$, где N_0^2 — максимум квадрата частоты плавучести. В этом случае спектральная задача (6) приводится к задаче на собственные значения для самосопряженного операторного пучка вида:

$$M(\mu)\psi \equiv \left(\mu I - B_0^{-1} + \mu S_1 + \mu S_2 + \mu^2 F(\mu)\right)\psi, \quad \mu \in (0; N_0^{-2}). \quad (7)$$

Здесь операторы S_t, B_0^{-1} — самосопряженные положительные и вполне непрерывные , а оператор-функция $F(\mu)$ принимает значения на множестве самосопряженных компактных операторов. Кроме того, оператор B_0^{-1} имеет счетное множество конечнократных собственных значений λ_k, для которых справедлива асимптотическая формула:

$$\lambda_k\left(B_0^{-1}\right) = c_{B_0^{-1}}\, k^{-2/3}\left(1 + o(1)\right) \text{ при } k \to \infty$$

Назовем условием устойчивой стратификации условие:

$$\lambda_1(B_0) > \max\left(\left[\sqrt{N_0^2 + \frac{g^2}{c^4}} - \frac{g}{c^2}\right]^2, \frac{g^2}{c^4} \right).$$

В случае выполнения условия устойчивой стратификации оператор-функция $M(\mu)$ из (7) допускает спектральную факторизацию вида:

$M(\mu) = M_+(\mu)(\mu I - Z)$,

где оператор-функция $M_+(\mu)$ голоморфна и голоморфно обратима при рассматриваемых значениях μ, а спектр оператора Z лежит в указанном в (7) интервале.

Доказаны следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условия устойчивой стратификации спектр задачи (5) вещественный и состоит из последовательности конечнократных собственных значений λ_k,

$k = 1,2, \ldots$ с асимптотическим поведением

$\lambda_k = \lambda_k(B_0)(1+o(1))$, при $k \to +\infty$.

Соответствующие им собственные векторы имеют характер акустических волн.

ТЕОРЕМА 2. Система собственных векторов операторного пучка (6) образует р-базис в некотором гильбертовом пространстве.

2. Рассмотрим теперь спектральную зону $\lambda \in [0, N_0^2]$. В этом случае можно показать, что спектр исследуемой задачи определяется наличием оператора A_{22}, спектр которого чисто непрерывный и заполняет указанный отрезок. Доказана следующая :

ТЕОРЕМА 3. Предельный спектр задачи (6) совпадает с отрезком $\lambda \in [0, N_0^2]$

С физической точки зрения дискретному спектру задачи отвечают волны, порожденные сжимаемостью, а предельному спектру – волны, порожденные наличием стратификации.

3. На основе изученных свойств решений спектральной задачи и операторов, входящих в уравнение (6) для начально-краевой задачи (1)—(5) при выполнении условий $\vec{w}^0(\vec{x})$, $\vec{w}^1(\vec{x}) \in L_2(\Omega, \rho_0(z))$ может быть доказана теорема о корректной разрешимости задачи Коши и наличие решения с конечной кинетической энергией.

Список литературы

1. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. - М. Наука, 1986. – 288 с.

2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике.—М. Наука, 1989. – 416 с.

Анотація

Вронський, Б. М. О власних коливаннях стисливої стратифікованої рідини // Вчені записки ТНУ, 2000, № 14

В роботі розглянута задача про малі рухи і власні коливання стратифікованої рідини в обмеженої області. Показано, що спектр складається зі счисленної множини власних значень та ділянки неперервного спектру. Здобуті асимптотичні формули для власних значень. Доказана коректна розв'язність задачі Коші.

Summary

Wronsky, B. M. On proper oscillations of compressible stratified fluid // Uchenye zapiski TNU, 2000, No. 14

In the article the problem on small motions and proper oscillations of stratified fluid in the bounded region. It was shown that the spectre consists of a countable set of eigenvalues and a part of continuous spectre. Asymptotic formulas for eigenvalues were obtained. Correct solvability of Cauchy problem has been proven.