ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ УГОЛКОВОГО СЕЧЕНИЯ

Папков С. О., аспирант

Рассматривается кручение стержня с сечением в виде равнобокого уголка (в ПДСК xOy: $\{0\le x\le b, 0\le y\le d\}\cup\{0\le x\le d, 0\le y\le b\}$; $d< b$). Решение данной задачи сводится [1] к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$x_k = \frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n\Delta_n}{k^2+n^2}+\beta_k \quad , k=1,2,3,... \qquad (1).$$

Здесь, $\gamma=b/d$; $\Delta_n = \dfrac{2sh\pi n sh\pi n(\gamma-1)}{sh\pi n\gamma}$;

$$\beta_k = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{4th\frac{\pi k}{2}}{\pi^3k^2}-\frac{16k}{\pi^4}\sum_{n=1,3,...}^{\infty}\frac{sh\pi n}{n^2(n^2+k^2)sh\pi n\gamma}-\frac{4}{\pi^3k^2}\cdot\frac{1+(-1)^{k+1}}{sh\pi k}$$

Согласно [1], бесконечная система (1) имеет единственное ограниченное решение, которое оценивается следующим образом :

$$\frac{16}{\pi^3}\left[\frac{\pi}{8k}-\frac{1}{4k^2}+\frac{1}{2k^2(1+e^{\pi k})}-\frac{k}{(1+k^2)}\cdot\frac{sh\pi}{\pi sh\pi\gamma}\right]\le x_k\le 0.08856-\frac{0.972}{sh\pi\gamma} \quad ,(k\ge 4). \qquad (2).$$

При кручении стержня данного профиля касательные напряжения во внутренней угловой точке (d,d) стремятся к бесконечности [2] как $c_0 r^{-1/3}$, при $r\to 0$ ($r=((x-d)^2+(y-d)^2)^{1/2}$). Чтобы найти коэффициент c_0, рассмотрим касательные напряжения τ_{xz} в области сечения $\{d\le x\le b,\ 0\le y\le d\}$, в которой они задаются формулой:

$$\frac{\tau_{xz}}{G\Theta d\pi}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x_k\cdot\cos\frac{k\pi y}{d}\cdot\frac{shk\pi\cdot shk\pi(\gamma-\frac{x}{d})}{shk\pi\gamma}+\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1,3,...}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi y}{d}}{k^2}\cdot(1-\frac{shk\pi\frac{x}{d}}{shk\pi\gamma}) \quad , \qquad (3).$$

При $x=d$ первый ряд в (3) сходится как ряд Фурье с общим членом порядка $O(x_k)$, поэтому здесь не удается получить верхнюю оценку для касательных напряжений τ_{xz}, используя правую часть оценки (2). В связи с этим возникает вопрос об асимптотическом поведении решения системы (1).

С помощью замены переменных $x_k=y_k k^{-2/3}$ приведем бесконечную систему (1) к виду

$$y_k = \frac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_n y_n n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2}+k^{\frac{2}{3}}\beta_k \quad , (k=1,2,3,...) \qquad (4)$$

Бесконечная система (6) остается регулярной ($\Delta_n\le 1$):

$$\frac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_n\cdot n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2}<\frac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^{-\frac{2}{3}}dx}{x^2+k^2}\equiv 1$$

но не является вполне регулярной, то есть не существует такого $h>0$, что $\rho_k\geq h$ $(k=1,2,3,...)$ Здесь

$$\rho_k=1-\frac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta_n n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2}.$$

Применяя формулу суммирования Эйлера-Маклорена [5], получаем, что $\rho_k=A(\gamma)k^{-1/3}+O(k^{-4/3})$. Следовательно $\rho_k\to 0$ при $k\to\infty$. Функция $A=A(\gamma)$ изображена на *рис.1.*

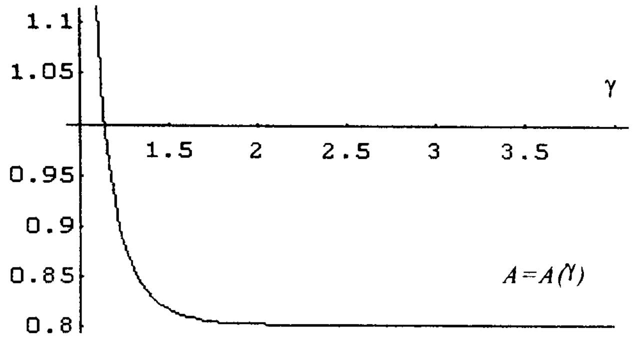

рис.1.

Решение регулярной бесконечной системы (4) стремится к ненулевой константе при возрастании номера k. Доказать это, применяя результаты статьи [4], не удается. Поэтому предлагается теорема, обобщающая достаточный признак [4] существования ненулевого предела главного решения неоднородной регулярной бесконечной системы

$$z_k=\sum_{n=1}^{\infty}c_{k,n}z_n+b_k\ ,\qquad (k=1,2,3...),\tag{5}$$

с неотрицательными коэффициентами.

<u>Теорема.</u> Чтобы существовал положительный предел главного решения системы (5), кроме условия существования решения [3] ($\exists B>0$: $\forall k\in\mathbb{N}$ $b_k\leq B\rho_k$ $\quad(\rho_k=1-\sum_{n=1}^{\infty}c_{k,n}>0)$), достаточно выполнения двух дополнительных условий:

a) $\exists\, L\geq l>0:\forall\, k,n\in\mathbf{N}\ (k<n)\ l\xi_n\rho_k\leq c_{k,n}\leq L\xi_n\rho_k$, здесь $\xi_n>0$, $(n=1,2,3,...)$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\xi_n=\infty$;

b) главное решение $\{z_k\}$ бесконечной системы является единственным ограниченным решением.

Здесь в оценках коэффициентов бесконечной системы появилась последовательность $\{\xi_n\}$.

Доказательство теоремы получается по схеме, предложенной в [4].

При $\gamma=1$ бесконечная система (1) вырождается, имея тривиальное решение $x_k\equiv b_k$, поэтому данная точка может быть исключена из рассмотрения. Для $\gamma>1$ последовательность $\{\rho_k\}$ убывает как $O(k^{-1/3})$ с ростом k. Для дальнейших оценок используем, что при $\gamma\geq 1.01$: $0.76\leq\rho_k\,k^{1/3}\leq 3.6$ $(k=1,2,3,...)$.

В бесконечной системе (4) последовательность свободных членов $\{b_k\ k^{2/3}\}$ оценивается сверху следующим образом: $b_k\, k^{2/3} \le 2/\pi^2\, k^{-1/3}$,(k=1,2,3...) , откуда следует, что $b_k\, k^{2/3}/\rho_k \le 0.27$ (при $\gamma \ge 1.01$, k=1,2,3...) . Таким образом, бесконечная система (4) удовлетворяет условию существования решения при $\gamma>1$. При $n<k$ для коэффициентов бесконечной системы (4) (при $\gamma \ge 1.01$) справедливы оценки:

$$0.02\cdot\rho_k\cdot\xi_n \le \frac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\cdot\frac{\Delta_n n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2} \le \rho_k\cdot\xi_n\cdot 0.42 \quad , \qquad (\xi_n \equiv n^{-2/3}).$$

Таким образом условие *а)* теоремы для системы (4) выполнено. Единственность ограниченного решения (4) следует из теоремы, установленной Бондаренко П.С. [6] . Все условия теоремы применительно к бесконечной системе (4) выполнены. Следовательно существует $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a_0 > 0$.

Факт существования отличного от нуля предела неизвестных в бесконечной системе (4) позволяет построить численный алгоритм нахождения первых N неизвестных и предельного значения a_0 . В основе алгоритма лежит следующее свойство лимитант (лимитантами для системы (5) названы [3] отношения $\forall k>p \quad V_k^{(p)} = b_k^{(p)}/\rho_k^{(p)} = (b_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n} z_n)/(\rho_k + \sum_{n=1}^{p} c_{k,n})$) : если $h^{(p)} \le V_k \le H^{(p)}$, то $h^{(p)} \le z_k \le H^{(p)}$ при k>p. Заменяя на $(i+1)$-ом шаге алгоритма в системе (4) все неизвестные с номерами большими некоторого N на их нижнюю (верхнюю) оценку на i-ом шаге h^i (H^i) получаем мажорантную снизу (сверху) систему для (4):

$$\hat{y}_k^{(i+1)} = \frac{k^{-\frac{5}{3}}}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta_n \hat{y}_n^{(i+1)}\cdot k^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2} + h^{(i)}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{k^{-\frac{5}{3}}}{\pi}\frac{\Delta_n\cdot n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2} + k^{\frac{2}{3}}\beta_k \quad , \quad \check{y}_k^{(i+1)} = \frac{k^{-\frac{5}{3}}}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta_n \check{y}_n^{(i+1)}\cdot k^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2} + H^{(i)}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{k^{-\frac{5}{3}}}{\pi}\frac{\Delta_n\cdot n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2} + k^{\frac{2}{3}}\beta_k \qquad (6)$$

При 1.01 оценки для неизвестных с номерами большими N на $(i+1)$-ом шаге алгоритма имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} H^{(i+1)} \\ h^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sup \\ \inf \end{Bmatrix}_{k>N} \frac{\dfrac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\Delta_n\cdot n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2}\cdot\begin{Bmatrix} \check{y}_n^{(i+1)} \\ \hat{y}_n^{(i+1)} \end{Bmatrix} + k^{\frac{2}{3}}\beta_k}{\dfrac{k^{\frac{5}{3}}}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\Delta_n\cdot n^{-\frac{2}{3}}}{n^2+k^2} + \rho_k} \quad , \qquad (7)$$

H^0=0.27; h^0=0; i=*1,2,3, ...*

В формулах (6,7) остаток ряда, и ρ_k подсчитывались с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена [5].

Найденные на каждом i-ом шаге итерации значения $H^{(i)}$ и $h^{(i)}$ дают, соответственно, верхнюю и нижнюю оценки для a_0 , а решения мажорантных систем в (6) верхнюю и нижнюю оценки для первых N неизвестных. Из того, что бесконечная система (4) удовлетворяет условиям теоремы следует сходимость $H^{(i)} \to a_0$, $h^{(i)} \to a_0$ при $i \to \infty$, и сходимость решений мажорантных систем в (6) к y_k ($k=1,2,3,\ldots, N$) при $i \to \infty$.

На *рис.2.* приведена зависимость a_0 от геометрического параметра γ .

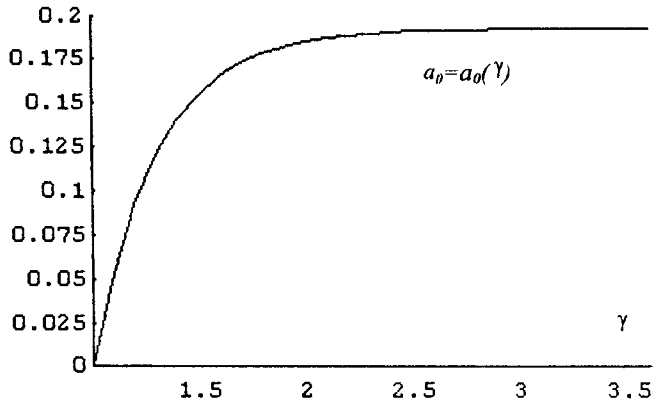

рис.2

Оказывается, что при $\gamma \to \infty$: $a_0(\gamma) \to a_{lim}=0.1931$. Предельное значение a_{lim} является предельным значением неизвестных в системе (4), при $\gamma \to \infty$. Полученные значения y_k и a_0 позволяют найти всю последовательность неизвестных в бесконечной системе (1) :

$$x_k = \begin{cases} y_k \cdot k^{-\frac{2}{3}}, k \le \\ a_0 \cdot k^{-\frac{2}{3}}, k > \end{cases}$$

В таблице1 приведены значения y_k и a_0 при различных значениях γ.

Таблица 1.

γ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_{10}	a_0
1.2	0.02672	0.07111	0.07903	0.08301	0.08540	0.09008	0.0925
2	0.08450	0.15230	0.16661	0.17298	0.17646	0.18251	0.1853
3.6	0.08937	0.15909	0.17389	0.18043	0.18398	0.19011	0.1929
∞	0.08940	0.15914	0.17394	0.18048	0.18403	0.19016	0.1931

При $x=d$ первый ряд в выражении (3) для $_{xz}$ сходится как ряд Фурье с общим членом порядка $O(k^{-2/3})$. Для улучшения его сходимости применим метод Крылова , используя, что при больших k : $x_k \;\; a_0 k^{-2/3}$.

$$\left. \frac{\tau_{xz}}{G\Theta d\pi} \right|_{x=d} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k^{\frac{2}{3}}} \cdot \cos\frac{k\pi y}{d} \cdot \left\{ y_k \Delta_k - a_0 \right\} - \frac{a_0}{2} \cdot S(y) +$$

$$+ \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\cos\frac{k\pi y}{d}}{k^2} \cdot \left(1 - \frac{shk\,\pi}{shk\,\pi\gamma}\right) \qquad (8),$$

здесь $y \in [0,d]$, $S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \pi k \frac{y}{d}}{k^{2/3}} = \mathrm{Re}(Li_{2/3}(-e^{iy\pi/d}))$, ($Li_{2/3}$ — обобщенный полилагорифм).

На *рис.3.* приведены графики $\tau_{xz}(d,y)/G\theta d\pi$ при $\gamma_1=1.2$ и $\gamma_2=3.6$.

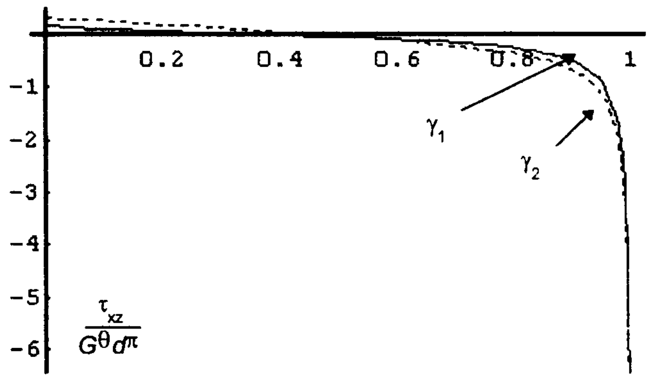

рис.3.

Из свойств функции $Li_{2/3}$ следует, что при $y \to d$:

$$S(y)=1{,}584078 \cdot (1-y/d)^{-1/3}+O(1), \tag{9}$$

то есть особенность в поведении касательных напряжений при подходе к внутренней угловой точке сечения заключена в поведении функции $S(y)$. Используя (9), получаем из (10), что

$$c_0 = -\,1{,}584078 \cdot \pi\theta G d^{4/3} a_0 /2.$$

Учтем также, что при $\gamma \geq 4$: $a_0 \approx 0.1931$, тогда при $\gamma \geq 4$: $c_0 \approx -\,0{,}153\pi\theta G d^{4/3}$ — то есть при $\gamma \geq 4$ c_0 от b не зависит.

В заключение отметим, что аналогичный подход может быть применен и к другим граничным задачам теории упругости. При этом, особенности напряженного состояния могут быть исследованы при помощи асимптотики решения бесконечной системы, соответствующей рассматриваемой задаче.

Литература.

1. Абрамян Б.Л., Арутюнян Н. Х. Кручение упругих тел. – М: Физматгиз, 1963, 683 с.
2. Партон В. З., Перлин П. И. Математические методы теории упругости.– М: Наука, 1981, 688 с.
3. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений.// Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1930, 3, с.41-167.
4. Чехов В.Н., Папков С.О. О достаточных условиях существования ненулевого предела для решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений // Ученые записки Симферопольского госуниверситета, 1997, №4 (43), – С. 3-9.
5. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики т2. – М: Мир, 1970, – 352 с.
6. Бондаренко П.С. К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений.– М: Мат. сборник, 1951, 29, №2. – С. 403-418.