УДК 517.9:532

О СВОЙСТВАХ БАЗИСНОСТИ И АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА В ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИКИ

Закора Д. А.[1]

В работе рассмотрена спектральная задача, к которой сводится изучение задачи о нормальных колебаниях частично диссипативной гидродинамической системы в неподвижном контейнере. Получены утверждения о базисности Рисса, p-базисности с конечным дефектом части собственных элементов задачи, асимптотические формулы для ветвей собственных значений.

Ключевые слова: гидросистема, базис, асимптотика спектра

Постановка задачи.

Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_0, самая нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена вязкой несжимаемой жидкостью плотности ρ_0 и с динамическим коэффициентом вязкости μ. Области Ω_i $(i=\overline{1,m})$ заполнены идеальными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_i. При этом $\rho_0>\rho_1>\ldots>\rho_m>0$.

Задача о нормальных колебаниях данной гидросистемы сводится к изучению следующего операторного пучка в некотором гильбертовом пространстве E:

$$\left[\lambda^2\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & A_{2,2}\end{pmatrix}-\lambda\mu\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B & -Q^* \\ -Q & I_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ (\psi_1;\psi)^t\in E_1\oplus E_2=:\mathrm{E},\quad (1)$$

где $T:=A_{1,1}-A_{1,2}A_{2,2}^{-1}A_{2,1}$, $B:=\widetilde{B}+Q^*Q$, $Q:=A_{2,2}^{-1}A_{2,1}$, а I_1, I_2 – единичные операторы в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 соответственно. Операторный блок, элементами которого являются операторы $A_{i,j}$ $(i,j=1,2)$, есть положительный и компактный оператор в гильбертовом пространстве E. Операторы T и $A_{2,2}$ конечного порядка и положительны, а их собственные значения имеют степенную асимптотику. Оператор $\widetilde{B}$ конечного порядка ($\widetilde{B}\in S_{p_B}$) и неотрицателен, его собственные числа имеют степенную асимптотику. Оператор Q компактен.

Свойства базисности части собственных элементов спектральной задачи.

Относительно спектральной задачи (1) имеют место следующие теоремы.

---

[1] Кафедра математического анализа

Теорема 1. *Для любого фиксированного* t_0 *такого, что* $0 < t_0 < (g\|A_{2,2}\|^{-1})^{1/2}$, *и достаточно большой вязкости* $\mu = \mu(t_0)$ *спектр задачи (1), лежащий в круге радиуса* t_0, *принадлежит интервалу* $[0,t_0)$, *а собственные элементы пучка (1), отвечающие собственным значениям из промежутка* $(0,t_0)$, *после проектирования на* $(Ker\,\widetilde{B})^{\perp}$, *образуют там базис Рисса.*

Доказательство. Представим матричный пучок (1) в виде системы:

$$\begin{cases} \lambda^2 T\psi_1 - \lambda\mu I_1\psi_1 + gB\psi_1 - gQ^*\psi = 0 \\ \lambda^2 A_{2,2}\psi - gQ\psi_1 + gI_2\psi = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Преобразуем второе уравнение системы к следующему виду:

$$D(\lambda)\psi := (I_2 + \lambda^2 g^{-1} A_{2,2})\psi = Q\psi_1. \tag{3}$$

Зафиксируем t_0, удовлетворяющее условиям леммы. Тогда в открытом круге радиуса t_0 оператор-функция $D(\lambda)$ обратима и для обратной справедливо разложение в ряд Неймана:

$$D^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda^2 g^{-1})^k A_{2,2}^k. \tag{4}$$

При этих условиях на λ из соотношения (3) можно выразить ψ:

$$\psi = D^{-1}(\lambda)Q\psi_1. \tag{5}$$

Подставим выражение (5) для ψ в первое уравнение системы (2), получим:

$$\lambda^2 T\psi_1 - \lambda\mu I_1\psi_1 + gB\psi_1 - gQ^* D^{-1}(\lambda)Q\psi_1 = 0. \tag{6}$$

Преобразуем следующее выражение:

$$gB - gQ^* D^{-1}(\lambda)Q = g\widetilde{B} + gQ^*Q - gQ^*\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda^2 g^{-1})^k A_{2,2}^k Q =$$

$$= g\widetilde{B} + \lambda^2 (A_{1,2}A_{2,2}^{-1/2})\sum_{k=1}^{\infty}(-\lambda^2 g^{-1})^{k-1} A_{2,2}^{k-1}(A_{2,2}^{-1/2}A_{2,1}) =$$

$$= g\widetilde{B} + \lambda^2 A_{1,2}A_{2,2}^{-1/2}D^{-1}(\lambda)A_{2,2}^{-1/2}A_{2,1}. \tag{7}$$

С помощью преобразования (7) уравнение (6),предварительно поделенное на $-\mu$, приводится к следующей спектральной задаче:

$$l_0(\lambda)\psi_1 = 0, \quad \psi_1 \in E_1,$$
$$l_0(\lambda) := \lambda I_1 - g\mu^{-1}\widetilde{B} - \lambda\mu^{-1}G_0(\lambda), \quad G_0(\lambda) := \lambda T + \lambda A_{1,2}A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}D^{-1}(\lambda)A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}A_{2,1}. \tag{8}$$

Очевидно, что пучок $l_0(\lambda)$ самосопряженный $(l_0^*(\lambda) = l_0(\bar{\lambda}))$, это следует из свойств входящих в него операторов. Пучок $l_0(\lambda)$ вырожден в том смысле, что $Ker\ \widetilde{B} \neq \{0\}$.

Перейдем к невырожденному операторному пучку. Обозначим через Π_1 ортопроектор на $Ker\ \widetilde{B} =: E_{1,1}$, а через $\Pi_2 := (I_1 - \Pi_1)$ – ортопроектор на $(Ker\ \widetilde{B})^{\perp} =: E_{1,2}$, тогда $\psi_1 = \tau_1 + \tau_2$, где $\tau_i = \Pi_i \psi_1$ $(i = 1,2)$. Подставим представление для ψ_1 в (8) и применим к полученному выражению поочередно ортопроекторы Π_1 и Π_2. Получим два соотношения:

$$\lambda I_{1,1}\tau_1 - \lambda\mu^{-1}\Pi_1 G_0(\lambda)(\Pi_1\tau_1 + \Pi_2\tau_2) = 0, \tag{9}$$

$$\lambda I_{1,2}\tau_2 - g\mu^{-1}\Pi_2\widetilde{B}\Pi_2\tau_2 - \lambda\mu^{-1}\Pi_2 G_0(\lambda)(\Pi_1\tau_1 + \Pi_2\tau_2) = 0, \tag{10}$$

где $I_{1,1}$ и $I_{1,2}$ – единичные операторы в $E_{1,1}$ и $E_{1,2}$ соответственно. Выберем μ_1 так, что $\mu_1 > \max\limits_{|\lambda| \le t_0} \|\Pi_1 G_0(\lambda)\Pi_1\|$, тогда из (9), при $\mu > \mu_1$, можно выразить τ_1:

$$\tau_1 = \mu^{-1}M_1^{-1}(\lambda)\Pi_1 G_0(\lambda)\Pi_2\tau_2, \quad M_1(\lambda) := I_{1,1} - \mu^{-1}\Pi_1 G_0(\lambda)\Pi_1. \tag{11}$$

Подставим представление (11) в соотношение (10), получим следующую спектральную задачу в гильбертовом пространстве $E_{1,2}$:

$$\begin{aligned} &m_0(\lambda) := (\lambda I_{1,2} - g\mu^{-1}\Pi_2\widetilde{B}\Pi_2 - \lambda\mu^{-1}M_2(\lambda))\tau_2 = 0, \\ &M_2(\lambda) := \Pi_2 G_0(\lambda)\Pi_2 + \mu^{-1}\Pi_2 G_0(\lambda)\Pi_1 M^{-1}(\lambda)\Pi_1 G_0\Pi_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Легко проверить, что $M_2^*(\lambda) = M_2(\bar{\lambda})$. Это означает, что $m_0(\lambda)$ самосопряженная оператор-функция. Таким образом, мы преобразовали вырожденный пучок $l_0(\lambda)$ к самосопряженному пучку $m_0(\lambda)$, рассматриваемому в $E_{1,2}$, причем $Ker\ \Pi_2\widetilde{B}\Pi_2 = \{0\}$ в $E_{1,2}$. Так как оператор $\widetilde{B}$ является оператором конечного порядка, оператор $\Pi_2\widetilde{B}\Pi_2$ – полный оператор конечеого порядка. Кроме того, можно проверить, что в открытом круге радиуса t_0 оператор-функция $M_2(\lambda)$ представима в виде ряда по λ, начиная с первой степени, с самосопряженными операторными коэффициентами:

$$M_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k R_k, \quad R_k = R_k^* \in S_{\infty}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{13}$$

Выберем μ_2 следующим образом:

$$\mu_2 > g t_0^{-1}\|\Pi_2\widetilde{B}\Pi_2\| + \sum_{k=0}^{\infty} t_0^k \|R_{k+1}\|,$$

тогда для пучка $m_0(\lambda)$ при $\mu > \mu_2$ выполнится факторизационное неравенство

$$g(\mu t_0)^{-1} \Pi\ \widetilde{B}\Pi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} t_0^{k-1}\mu^{-1} R_k' < 1. \qquad (14)$$

Пусть $\mu > \max\{\mu_1, \mu_2\}$. В этом случае пучок $m_0(\lambda)$ удовлетворяет всем требованиям общей теоремы из [1,2] о базисности Рисса. Таким образом, собственные элементы пучка $m_0(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из промежутка $(0, t_0)$, образуют базис Рисса в пространстве $E_{1,2}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ собственные элементы спектральной задачи (1), отвечающие собственным значениям из промежутка $(0, \varepsilon)$, после проектирования на $(Ker\ \widetilde{B})^{\perp}$ образуют p-базис при $p \geq p_B$ в пространстве $(Ker\ \widetilde{B})^{\perp}$ с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. При достаточно малых λ, без ограничения на вязкость, с помощью рассуждений теоремы 1 приходим к спектральной задаче (12) с пучком операторов $m_0(\lambda)$. Для пучка $m_0(\lambda)$ выполнены, как несложно проверить, следующие условия: $m_0'(0) = I_{1,2} >> 0$ (*в* $E_{1,2}$), $m_0(0) = -g\mu^{-1}\Pi_2\widetilde{B}\Pi_2 \in S_{p_B}$. Используя теорему из работы [3] о p-базисности, получаем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ собственные элементы пучка $m_0(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из промежутка $(0, \varepsilon)$, образуют p-базис при $p \geq p_B$ в пространстве $E_{1,2}$ с точностью до конечного дефекта. Теорема доказана.

Асимптотика ветвей собственных значений. Из теорем 1 и 2, кроме свойств базисности части собственных элементов, следует, что точка нуль является предельной точкой некоторой ветви собственных значений спектральной задачи (1), локализованных у положительной полуоси.

Относительно спектральной задачи (1) имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Для ветви $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ собственных значений спектральной задачи (1), имеющей предельной точкой нуль, справедлива асимптотическая формула:*

$$\lambda_k^0 = g\mu^{-1}\lambda_k(\widetilde{B})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty). \qquad (15)$$

Доказательство. Для достаточно малых λ получена задача (12) в пространстве $E_{1,2}$. Произведем в пучке задачи (12) замену $\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}$ и обозначим $\widetilde{m}_0(\widetilde{\lambda}) := \widetilde{\lambda} m_0(\widetilde{\lambda}^{-1})$. Тогда при достаточно больших $\widetilde{\lambda}$, имеет место представление

$$\widetilde{m}_0(\widetilde{\lambda}) = I_{1,2} - \widetilde{\lambda} g\mu^{-1}\Pi_2\widetilde{B}\Pi_2 - \mu^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}^{-k} R_k,$$

где R_k – операторы из (13). Применив к пучку $\widetilde{m}_0(\widetilde{\lambda})$ теорему из [5], получим, что

$$\widetilde{\lambda}_k(\widetilde{m}_0(\widetilde{\lambda})) = \mu g^{-1}\lambda_k^{-1}(\widetilde{B})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty),$$

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(l_0(\lambda)) = \widetilde{\lambda}_k^{-1}(\widetilde{m}_0(\widetilde{\lambda})) = g\mu^{-1}\lambda_k(\widetilde{B})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Обозначим* $\Lambda_{R,\varepsilon} := \{\lambda \mid |\lambda| > R, |\arg\lambda| < \varepsilon\}$ $(-\pi < \arg\lambda \le \pi)$. *Для любого как угодно малого* $\varepsilon > 0$ *и достаточно большого* $R = R(\varepsilon)$ *спектральная задача (1) имеет ветвь* $\{\lambda_k^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ *собственных значений, расположенных в секторе* $\Lambda_{R,\varepsilon}$, *со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_k^{\infty} = \mu\lambda_k(T^{-1})(1+o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{16}$$

Доказательство. Аналогично теореме 1 при $\lambda \in \Lambda_{R,\varepsilon}$ получим уравнение (6). Преобразовав, как и в теореме 1, разность третьего и четвертого слагаемых, получим следующее уравнение:

$$\lambda^2 T\psi_1 - \lambda\mu I_1\psi_1 + g\widetilde{B}\psi_1 + \lambda^2 A_{1,2}A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}D^{-1}(\lambda)A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}A_{2,1}\psi_1 = 0. \tag{17}$$

Разделив (17) на $-\lambda\mu$, получим спектральную задачу

$$l_1(\lambda)\psi_1 = 0, \quad \psi_1 \in E_1,$$
$$l_1(\lambda) := I_1 - \lambda\mu^{-1}T - G_1(\lambda), \quad G_1(\lambda) := g(\lambda\mu)^{-1}\widetilde{B} + \lambda\mu^{-1}A_{1,2}A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}D^{-1}(\lambda)A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}A_{2,1}. \tag{18}$$

Докажем, что $G_1(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty, \lambda \in \Lambda_{R,\varepsilon})$. Для этого достаточно показать, что

$$\left\|A_{1,2}A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}D^{-1}(\lambda)A_{2,2}^{-\frac{1}{2}}A_{2,1}\right\| = o(|\lambda|^{-1}) \quad (\lambda \to \infty, \quad \lambda \in \Lambda_{R,\varepsilon}). \tag{19}$$

Используя оценки из работы [4], произведем следующие преобразования:

$$\left\|A_{1,2}A_{2,2}^{-1/2}D^{-1}(\lambda)A_{2,2}^{-1/2}A_{2,1}\right\| = \left\|A_{1,2}A_{2,2}^{-1/2}(I_2 + i\lambda g^{-1/2}A_{2,2}^{1/2})^{-1}(I_2 - i\lambda g^{-1/2}A_{2,2}^{1/2})^{-1}A_{2,2}^{-1/2}A_{2,1}\right\| \le$$
$$\le \left\|A_{1,2}A_{2,2}^{-3/4}\right\| \cdot \left\|(I_2 + i\lambda g^{-1/2}A_{2,2}^{1/2})^{-1}g^{-1/4}A_{2,2}^{1/4}\right\| \times$$
$$\times \left\|(I_2 - i\lambda g^{-1/2}A_{2,2}^{1/2})^{-1}g^{-1/4}A_{2,2}^{1/4}(A_{2,2}^{-3/4}A_{2,1})\right\| \cdot g^{1/2} = o(|\lambda|^{-1}).$$

Из последней оценки и теоремы [5] следует утверждение настоящей теоремы.

Теорема 5. *Для любого как угодно малого* $\varepsilon > 0$ *и достаточно большого* $R = R(\varepsilon)$ *спектральная задача (1) имеет две комплексно-сопряженные ветви* $\{\lambda_k^{\pm i}\}_{k=1}^{\infty}$ *собственных значений, расположенных в секторах* $\Lambda_{R,\varepsilon}^{\pm}$, *со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_k^{\pm i} = \pm i g^{\frac{1}{2}}\lambda_k^{\frac{1}{2}}(A_{2,2}^{-1})(1+o(1)) \quad (k \to \infty). \tag{20}$$

Доказательство. Преобразуем первое уравнение системы (2) к виду:

$$K(\lambda)\psi_1 := (I_1 - \lambda\mu^{-1}T - g(\lambda\mu)^{-1}B)\psi_1 = -g(\lambda\mu)Q^*\psi. \tag{21}$$

В силу структуры пучка $K(\lambda)$, для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $R = R(\varepsilon)$ таким образом, что оператор-функция $K(\lambda)$ будет непрерывно обратима в области $\Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon}$. Считаем, что $\lambda \in \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon}$ и выразим ψ_1 из (21):

$$\psi_1 = -g(\lambda\mu)^{-1}K^{-1}(\lambda)Q^*\psi. \tag{22}$$

Подставим (22) во второе уравнение системы (2), получим спектральную задачу:

$$\begin{gathered} l_2(\lambda)\psi = 0, \quad \psi \in E_2, \\ l_2(\lambda) := I_2 + \lambda^2 g^{-1}A_{2,2} + G_2(\lambda), \quad G_2(\lambda) := g(\lambda\mu)^{-1}QK^{-1}(\lambda)Q^*. \end{gathered} \tag{23}$$

Можно проверить, что для оператор-функции

$$T(\lambda) := (I_2 - \lambda g^{-\frac{1}{2}}A_{2,2}^{-\frac{1}{2}})^{-1}G_2(\lambda)(I_2 + \lambda g^{-\frac{1}{2}}A_{2,2}^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

выполняется условие: $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon})$. Отсюда и из результатов работы [6] следует формула (20). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н. Д. Копачевскому за постоянное внимание и помощь в работе.

Список литературы

1. Маркус А. С., Мацаев В. И. О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка // Математический сборник, 1987 г., Т. 133, №3, С. 293–313.
2. Вирозуб А. И.. Мацаев В. И. // Функциональный анализ и его приложения. 1974 г., Т. 8, Вып. 1. С. 1–10.
3. Гринштейн В. А. Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции // Математические заметки, 1991 г., Т. 50, Вып. 1, С. 142–144.
4. Радзиевский Г. В. Кратная полнота корневых векторов пучка М. В. Келдыша, возмущенного аналитической в круге оператор-функцией // Математический сборник, 1973 г., Т. 91, №3, С. 310–335.
5. Авакян В. А. Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией // Функциональный анализ и его приложения, 1978 г., Т. 12, №2, С 66–67.
6. Оразов М. Б. О локализации спектра в задаче о нормальных колебаниях упругой оболочки заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Журнал математики и математической физики, 1985 г., Т. 25, №3, С. 403–412.

Анотація

Закора, Д.А. О свойствах базісності і асімптотіке спектра в одніеї спектральної задаче гідродинаміki // Вчені записки ТНУ, 2000, No, , – .

В роботі здобуті результати про асимптотичну поведінку власних значень, та твердження про р-базис, базис Рісса частини властних елементів одного операторного в`язка.

Summary

Zakora, D.A. On basicity property and spectrum asymptotics for some hydrodynamical spectral problem // Uchenye zapiski TNU, 2000, No, , – .

Some s tatements o n p -basis p roperty, Riesz` basis property of part of root elements, asymptotic behavior for eigenvalues are obtained.