УДК 532.5

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОДНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА, ПРЕВЫШАЮЩИЕ ПАРАМЕТР КОРИОЛИСА

Иванов Ю. Б.[1]

В работе рассматривается полиномиальный операторный пучок, возникающий при исследовании на математических моделях свободных колебаний вращающейся жидкости. Доказывается теорема о существовании собствгнных значений этого пучка, превышающих параметр Кориолиса.

Ключевые слова: операторный пучок, спектр, идеальная жидкость, колебания.

Исследование свободных колебаний жидкости в больших природных водоемах, например, таких как Черное море, на математических моделях [1], учитывающих вращение Земли и форму дна, приводит к необходимости изучения спектральной задачи для полиномиального пучка третьей степени с неограниченными самосопряженными операторными коэффициентами

$$\lambda^3\xi - \lambda(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})\xi + \alpha\mathbb{M}\xi = 0, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ – параметр Кориолиса, зависящий от угловой скорости вращения и от геометрических размеров бассейна.

Операторы, входящие в коэффициенты уравнения (1), представляют собой самосопряженные расширения (по Фридрихсу [2]) соответствующих дифференциальных операторов. Среди решений спектральной задачи рассматриваем решения, имеющие положительную ориентацию, то есть удовлетворяющие условию $(\mathbb{M}\xi,\xi) \geq 0$.

Под обобщенным решением спектральной задачи будем понимать вещественное собственное значение λ и собственный вектор ξ уравнения (1), обладающее при $\alpha > 0$ следующими свойствами

$$\lambda \in R, \quad \lambda(\lambda^2 - \alpha^2) \neq 0;$$

$$\xi \in D(\mathbb{L}) \subset \mathbb{H}^1(G) \subset \xrightarrow{C} \mathbb{L}_2(G), \quad \xi \neq 0; \quad (M\xi,\xi) \geq 0.$$

Существование обобщенных собственных векторов и собственных значений уравнения (1), таких что $\lambda > \alpha$, доказывается в следующем утверждении.

---

[1] Кафедра прикладной математики

Теорема. Пусть гильбертово пространство $\mathbb{H}^1(G)$ компактно вложено в гильбертово пространство $\mathbb{L}_2(G)$, то есть $\mathbb{H}^1(G) \subset \xrightarrow{c} \mathbb{L}_2(G)$.

Пусть оператор $\mathbb{L}: D(\mathbb{L}) \to \mathbb{L}_2(G)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) \subset \mathbb{H}^1(G)$ является самосопряженным, положительно определенным оператором, порождающим гильбертову пару ($\mathbb{H}^1(G), \mathbb{L}_2(G)$).

Пусть $\mathbb{M}: \mathbb{H}^1(G) \to \mathbb{L}_2(G)$ – ограниченный, самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям $\mathbb{L} \geq \mathbb{M}$, $\mathbb{M} \geq 0$.

Тогда уравнение

$$\left(\lambda^3\mathbb{E} - \lambda\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}\right)\xi = 0 \tag{2}$$

при $\alpha > 0$ имеет решение (λ, ξ), такое что $\xi \in D(\mathbb{L})$, $\lambda > \alpha$, λ – вещественное собственное значение конечной кратности.

Доказательство. Будем искать вещественные решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям $\lambda \geq \alpha > 0$, $\xi \in D(\mathbb{L})$. В этом случае уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)\xi = \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2\mathbb{E} + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3\mathbb{M}\right)\xi. \tag{3}$$

От уравнения (3) перейдем к уравнению с ограниченными операторами. Сделаем в (3) замену переменной

$$\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{1/2}\xi = \eta, \quad \eta \in \mathbb{H}^1(G). \tag{4}$$

Введем, также, новый спектральный параметр $\mu = \alpha/\lambda$, $0 < \mu \leq 1$. Применим к левой и правой части этого уравнения оператор $\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}$ и умножим его на μ^2. Получим уравнение

$$\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}\left(\alpha^2\mathbb{E} + \mu^3\mathbb{M}\right)\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}\eta = \mu^2\eta,$$

которое запишем в виде

$$\mathbb{Q}(\mu)\eta = \mu^2\eta, \tag{5}$$

где

$$\mathbb{Q}(\mu) = \left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}\left(\alpha^2\mathbb{E} + \mu^3\mathbb{M}\right)\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2} \tag{6}$$

Рассмотрим оператор $\mathbb{Q}(\tau)$, $0 < \tau \leq 1$. Оператор $\mathbb{Q}(\tau)$ – самосопряженный, компактный, положительный, имеет счетное множество конечнократных собственных значений, сходящихся к нулю

$$\mu^{(1)}(\tau) \geq \mu^{(2)}(\tau) \geq \ldots \mu^{(m)}(\tau) \geq \ldots$$

$$\mu^{(m)}(\tau) > 0, \; m = 1,2,\ldots$$

$$\mu^{(m)}(\tau) \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Оператор $\mathbb{Q}(\tau)$ и его собственные значения $\mu^{(m)}(\tau)$ монотонно зависят от параметра τ, то есть если $\tau^{(a)} \geq \tau^{(b)}$, то $\mathbb{Q}(\tau^{(a)}) \geq \mathbb{Q}(\tau^{(b)})$ и $\mu^{(m)}(\tau^{(a)}) \geq \mu^{(m)}(\tau^{(b)})$, $m = 1,2,\ldots$.

Так как $\mathbb{L} \geq \mathbb{M} \geq 0$, то для однопараметрического семейства операторов $\mathbb{Q}(\tau)$ на отрезке $[0,1]$ имеет место оценка $\|\mathbb{Q}(\tau)\| \leq 1$. Эта оценка следует из неравенства

$$((\mathbb{M}+\alpha^2\mathbb{E})\xi,\xi) = ((\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{1/2}\xi,(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{1/2}\xi), \quad \xi \in D(\mathbb{L}),$$

справедливого для $\mathbb{L} \geq \mathbb{M}$.

Обозначим наименьшее на отрезке $[\alpha,+\infty)$ собственное значение уравнения (2), если оно существует, через $\lambda^{(1)}$; большие собственные значения $\lambda^{(n)}$ занумеруем в порядке возрастания $\lambda^{(n)} \leq \lambda^{(n+1)}$. Для доказательства существования $\lambda^{(n)}$ $n = 1,2,\ldots$ будет построена бесконечная последовательность операторов $\mathbb{Q}_k^{(n)}$, $k = 1,2,\ldots$, определяемая следующими рекуррентными по индексу k формулами

$$\begin{gathered} \mathbb{Q}_0{}^{(n)} = \mathbb{Q}(0), \\ \tau_k^{(n)2} = \mu^{(n)2}(\mathbb{Q}_{k-1}{}^{(n)}), \\ \mathbb{Q}_k{}^{(n)} = (\mathbb{Q}\tau_k^{(n)}), \end{gathered} \tag{7}$$

$\mu^{(n)2}(\mathbb{Q}_{k-1}{}^{(n)})$ – n-ое собственное значение оператора $\mathbb{Q}_{k-1}{}^{(n)}$,

где оператор $\mathbb{Q}(\tau)$ определен формулой (6).

Полагаем в рекуррентных формулах (7) $n = 1$. Докажем, что уравнение (5) имеет решение $(\mu^{(1)},\eta^{(1)})$, $0 < \mu^{(1)} \leq 1$, $\eta^{(1)} \in \mathbb{H}^1(G)$. Доказательство проводим методом итераций по индексу k.

Для $k = 0$ полагаем, согласно (7), $\mathbb{Q}_0^{(1)} = \mathbb{Q}(0)$. Пусть $[\mu_0^{(1)}]^2 = [\mu^{(1)}(\mathbb{Q}_0^{(1)})]^2$ – наибольшее собственное значение неотрицательного, не равного тождественно нулю, самосопряженного компактного оператора

$$\mathbb{Q}_0^{(1)} = \mathbb{Q}(0) = \alpha^2(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}.$$

Из теорем о спектре вполне непрерывных самосопряженных операторов [2] следует, что такая спектральная пара $\left([\mu_0^{(1)}]^2,\eta^{(1)}\right)_0$ всегда существует и удовлетворяет условиям $\mu_0^{(1)} > 0$, $\eta_0^{(1)} \in \mathbb{H}^1(G)$, $\|\eta_0^{(1)}\| = 1$. Покажем, что $\mu_0^{(1)} \leq 1$. Действительно, $\mu_0^{(1)} = \mu^{(1)}(\mathbb{Q}(0))$. В силу свойства монотонности $\mu^{(1)}(\mathbb{Q}(0)) \leq \mu^{(1)}(\mathbb{Q}(1))$. В силу свойства ограниченности норм семейства операторов $\mathbb{Q}(\tau)$ имеем $\mu^{(1)}(\mathbb{Q}(1)) \leq 1$, то есть $\mu_0^{(1)} \leq 1$.

Сделаем первый шаг итерации, $k=1$. Построим оператор $\mathbb{Q}_1^{(1)} = \mathbb{Q}\left(\tau_1^{(1)}\right)$, где $\tau_1^{(1)} = \mu_0^{(1)}$. Из установленных неравенств $0 < \mu_0^{(1)} \le 1$ следует, в силу свойства монотонности, что $\mathbb{Q}_1^{(1)} \ge \mathbb{Q}_0^{(1)}$ и наибольшее собственное значение оператора $\mathbb{Q}_1^{(1)}$ удовлетворяет неравенству $\mu_1^{(1)} \ge \mu_0^{(1)}$. С другой стороны, так как $\tau_1^{(1)} = \mu_0^{(1)} \le 1$, то $\mathbb{Q}_1^{(1)} = \mathbb{Q}\left(\tau_1^{(1)}\right) \le \mathbb{Q}(1)$, и из свойства ограниченности норм следует неравенство $\mu_1^{(1)} \le 1$.

Процесс построения операторов $\mathbb{Q}_k^{(1)}$, определяемых рекуррентными формулами (7) при $n=1$, может быть неограниченно продолжен. В результате получаем монотонную ограниченную последовательность чисел $0 < \mu_0^{(1)} \le \mu_1^{(1)} \le \ldots \le \mu_k^{(1)} \le \ldots \le 1$ и ограниченную последовательность векторов $\left\{\eta_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\|\eta_k^{(1)}\right\| = 1$, $\eta_k^{(1)} \in \mathbb{H}^1(G)$. В силу теоремы о числовых монотонных последовательностях [3], монотонная ограниченная последовательность $\left\{\mu_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ имеет предел, обозначим его $\mu_\infty^{(1)}$, который должен удовлетворять неравенствам $0 < \mu_\infty^{(1)} \le 1$.

Покажем, что последовательность операторов $\left\{\mathbb{Q}_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно сходится к компактному оператору $\mathbb{Q}_\infty^{(1)} = \mathbb{Q}\left(\mu_\infty^{(1)}\right)$. Действительно, имеем очевидные равенства

$$\left\|\mathbb{Q}_k^{(1)} - \mathbb{Q}_\infty^{(1)}\right\| =$$

$$= \left\|\mathbb{Q}\left(\mu_{k-1}^{(1)}\right) - \mathbb{Q}\left(\mu_\infty^{(1)}\right)\right\| = \left|\left(\mu_{k-1}^{(1)}\right)^3 - \left(\mu_\infty^{(1)}\right)^3\right| \cdot \left\|\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2} \mathbb{M} \left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right)^{-1/2}\right\|$$

и, следовательно $\left\|\mathbb{Q}_k^{(1)} - \mathbb{Q}_\infty^{(1)}\right\| \to 0$ при $\mu_k^{(1)} \to \mu_\infty^{(1)}$.

Из ограниченной бесконечной последовательности векторов $\left\{\eta_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\|\eta_k^{(1)}\right\| = 1$, $\eta_k^{(1)} \in \mathbb{H}^1(G)$ можно извлечь сходящуюся в $\mathbb{L}_2(G)$ подпоследовательность. Перенумеруем элементы подпоследовательности и будем считать, что существует предел $\eta_\infty^{(1)} \in \mathbb{L}_2(G)$ у всей последовательности векторов.

Переходя к пределу в левой и правой части равенства

$$\mathbb{Q}_k^{(1)} \eta_k^{(1)} = \left[\mu_k^{(1)}\right]^2 \eta_k^{(1)},$$

получаем, что для предельных величин выполнено равенство

$$\mathbb{Q}\left(\mu_\infty^{(1)}\right) \eta_\infty^{(1)} = \left[\mu_\infty^{(1)}\right]^2 \eta_\infty^{(1)},$$

то есть $\eta_\infty^{(1)}$ есть собственный вектор, а $\left[\mu_\infty^{(1)}\right]^2$ есть конечнократное собственное значение уравнения (5), при этом $0 < \mu_\infty^{(1)} \le 1$, $\eta_\infty^{(1)} \in \mathbb{H}^1(G)$ как собственный вектор вполне непрерывного оператора $\mathbb{Q}\left(\mu_\infty^{(1)}\right)$. Определим вектор $\xi_\infty^{(1)} \in D(\mathbb{L})$ из равенства $\left(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E}\right)^{1/2}\xi_\infty^{(1)} = \eta_\infty^{(1)}$. Легко показать теперь, что $\xi_\infty^{(1)}$ есть собственный вектор, $\lambda_\infty^{(1)} = \alpha/\mu_\infty^{(1)}$ есть собственное значение уравнения (2), обладающее требуемыми свойствами.

Если $\lambda^{(1)} \equiv \lambda_\infty^{(1)} = \alpha$, то полагаем в рекуррентных формулах (7) $n = 2$ и находим второе собственное значение уравнения (2), при этом $\lambda^{(2)} \geq \lambda^{(1)} \geq \alpha$. Если $\lambda^{(2)} = \alpha$, то находим следующее собственное значение уравнения (2). Так как $\mu = 1$ может быть только конечнократным собственным значением вполне непрерывного оператора $\mathbb{Q}(1)$, то найдется такое n при котором выполняется строгое неравенство $\lambda^{(n)} > \alpha$, что требовалось доказать.

Список литературы

1. Иванов Ю. Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море // Доп. НАН України.– 1999.– №6.– С. 117–120.
2. Рисс. Ф., Сёкифальфи-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир. 1979.– 587 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т.1.– М.: Наука. 1974.– 479 с.

Анотація

Власні значення однієї операторної в'язки, які перевищують параметр коріоліса.

В роботі розглядається операторна поліноміальна в'язка, яка виникає при дослідженні вільних коливань рідини що обертається. Доводиться теорема про існування власних значень такої в'язки, які перевищують параметр Коріоліса.

Summary

Eigenvalues of one operator pencil, which exceed coriolis parameter.

Operator polynomial pencil, associated with the problem of free oscillations in rotating ideal liquid is considered. Existence theorem for the pencil eigenvalues which exceed Carioles parameter is proved.