О ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Переход А. И., аспирант

Вводится и исследуется новый класс задач многокритериального принятия решений при неполной информации (MCDMII), дается классификация и краткое описание задач этого класса. Подробно рассматривается задача MCDMII с булевыми переменными. Предложены модели, методы и алгоритмы, основанные на теории распознавания образов и предназначенные для применения в интеллектуальных системах.

1. **Введение**

Задачи принятия решений (DM) возникают во многих сферах человеческой деятельности и независимо исследовались в различных научных областях. Современная теория принятия решений представляет собой совокупность различных подходов, моделей и методов [1,2].

В настоящей статье рассматриваются задачи многокритериального принятия решений при неполной информации (MCDMII). Задачи MCDMII наиболее близки многим реальным задачам. Действительно, любая достаточно сложная практическая задача DM многокритериальна, и точное описание всех компонент модели принятия решений, как правило, невозможно [3].

Научное направление, которое занимается разработкой математических методов принятия решений при многих (противоречивых) критериях, известно как MCDM [4,5,6,7]. Однако применение традиционных методов многокритериальной оптимизации недостаточно для решения задач MCDMII. В то же время модели принятия решений при неполной информации (DMII), основанные на теории распознавания образов [3] и других подходах, не учитывают существования многих критериев.

Для решения задач MCDMII автор предлагает использовать методы искусственного интеллекта (ИИ) и распознавания образов (РО) в сочетании с известными подходами к решению задач MCDM и элементами теории приближенных множеств (*rough sets*) [8]. В рамках указанного подхода предлагаются некоторые новые методы и алгоритмы решения задач MCDMII.

2. MCDMII как научное направление

MCDMII имеет собственную область исследования и требует разработки новых моделей, методов и алгоритмов. Основа MCDMII – теория MCDM, дополненная методами ИИ и РО.

2.1 Задачи MCDM

Используемые в задачах MCDM модели описывают множество допустимых решений (альтернатив), которые оцениваются по многим (противоречивым) критериям. Критерии – это функции на множестве альтернатив, которые отражают различия по предпочтениям. Эти различия определяются лицом, принимающим решения (ЛПР). Таким образом, модели MCDM должны отражать субъективное восприятие человеком окружающей его действительности [1].

В задачах MCDM, как правило, нет полной информации, позволяющей найти необходимый для выбора "лучшей" альтернативы компромисс. В ряде случаев отсутствуют статистические данные, позволяющие установить отношения между критериями, и информация для оценки последствий выбора той или иной альтернативы [1,6].

Задача MCDM решается в два этапа: (a) построение "объективной" модели и (b) выбор "лучшей" альтернативы. Результатом первого этапа является аппроксимация множества эффективных решений (множества Парето). Множеству Парето принадлежат альтернативы, не доминируемые другими альтернативами по каждому из критериев. Исключение непаретовских решений в общем случае не решает задачу MCDM полностью. Только в немногих случаях для решения задачи достаточно аппроксимировать паретовское множество. Результатом второго этапа является "субъективный" выбор ЛПР лучшей альтернативы из паретовского множества.

Таким образом, задачи MCDM отличаются от других математических задач отсутствием единственного "объективного" решения [6].

2.2 Методы ИИ и РО

Укажем методы ИИ и РО, применимые к MCDMII, то есть решающие задачу извлечения дополнительной информации. К ним относятся индуктивные методы ИИ: машинное обучение и индуктивный вывод решающих правил, позволяющие извлекать логические закономерности из опыта [9]. Задача РО может быть сформулирована как принятие решения о принадлежности объекта некоторому классу. Наиболее простой вид задачи РО – дихотомия, в которой рассматриваются два класса объектов. Классы состоят из объектов с общими свойствами, объект задается двоичным набором признаков. Число признаков выбирается минимальным, с ростом числа признаков растет сложность соответствующих алгоритмов РО [10,11].

В [9] рассмотрены пять основных концепций машинного обучения, каждую из которых отличает способ представления знаний. Выделим две концепции, представляющие наибольший интерес для MCDMII.

Нейронные сети: знания представляются в виде многоуровневой сети, вершины которой соединены взвешенными ребрами. Точность классификации может быть улучшена за счет изменения весов [9,12]. Подход, основанный на нейронных сетях, широко используется в MCDM [12,13,14].

Индуктивный вывод: знания представляются в виде решающих деревьев. Информация о классах объектов хранится в концевых вершинах (листьях) дерева. Большинство методов основано на рекурсивном разбиении данных на непересекающиеся множества, каждое из которых описывается конъюнкцией логических выражений (условий).

2.3 Классификация задач MCDMII

Основой для классификации задач MCDMII являются следующие характеристики: тип неполноты информации, вид пространства решений, число ЛПР и неопределенность (изменяемость во времени) среды, в которой принимаются решения.

Как отмечалось выше, многокритериальность сама по себе подразумевает неполноту информации. Кроме того, во многих задачах отсутствует информация о критериях или множестве допустимых решений. В [3,15,16] рассматриваются соответствующие подходы к решению задач дискретной оптимизации при неполной информации, предложены соответствующие обучающие алгоритмы. Алгоритмы обучения, основанные на нейронных сетях, эффективны для непрерывного пространства решений. Для дискретного пространства подходящими являются решающие деревья. Неполнота информации имеет место в задачах переговоров (*negotiation problems*) [17], для решения которых используются методы теории игр, и в задачах принятия решений в динамически изменяющейся среде [18].

Классификация задач MCDMII приводится на рис. 1.

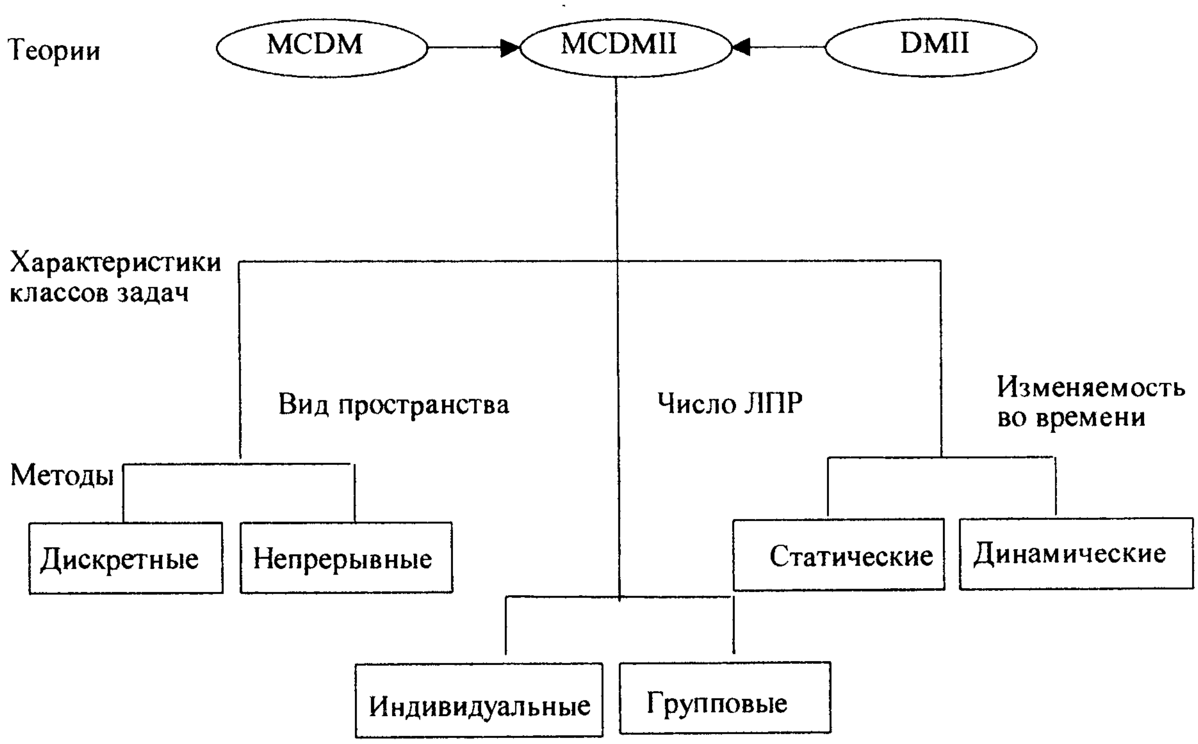

Рис. 1 Классификация задач MCDMII

3. Задача MCDMII с булевыми переменными

Рассмотрим задачу
$$\begin{cases} extr\, f_j(\tilde{x}), j = \overline{1,r}\ , \\ \tilde{x} \in \Omega \subset B^n\ , \end{cases} \tag{1}$$

где Ω – множество допустимых решений, $B^n=\{0,1\}^n$ – множество вершин единичного n-мерного куба, критерии есть псевдобулевы функции $\{ f_j : B^n \to R, j = \overline{1,r} \}$. Принятие решения понимается как выбор некоторого элемента $\tilde{x}^* = (x_1,...,x_n) \in B^n$, $x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$, из Ω в условиях неполноты информации о f_j и Ω. Задачу (1) будем называть задачей MCDMII с булевыми переменными.

3.1 **Сужение области неопределенности**

Решение задач MCDMII требует привлечения и разработки методов сужения области неопределенности, обусловленной неполнотой исходной информации. Для восстановления функций и множеств задачи (1) будем использовать методы РО [15,19,20], позволяющие извлечь дополнительную информацию из экспертных оценок. Предполагается, что выбор и оценка решений осуществляется экспертами, которые сравнивают по предпочтениям всевозможные пары альтернатив $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega$. Экспертные оценки, то есть знания о предпочтениях, используются далее для синтеза модели принятия решений, аппроксимирующей (1).

3.2 **Представление знаний о предпочтениях. Бикритериальные задачи**

Пусть информация о критериях $f_j, j = \overline{1,r}$ в (1) частично задана множеством $\tilde{\rho}$ бинарных отношений (БО), $\tilde{\rho} = \{\rho_1,...,\rho_r\}$. Будем говорить, что решение $\tilde{x}$ "лучше" ("не хуже") решения $\tilde{y}$ по критерию j, если пара $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega$ принадлежит БО $\rho_j : \tilde{x} \overset{j}{>} \tilde{y} (\tilde{x} \overset{j}{\geq} \tilde{y})$. Информацию о предпочтениях будем задавать в виде полного ориентированного мультиграфа (МГ). Вершины МГ обозначают решения $\tilde{x} \in \Omega$, а ребра, ориентированные от менее предпочтительного решения к более предпочтительному, задают БО между всеми парами решений [21,22].

Таким образом, выбор "лучшего" решения в задаче (1) сводится к набору бикритериальных задач
$$\begin{cases} extr\, f_i(\tilde{x})\ , \\ extr\, f_j(\tilde{x})\ , \\ 1 \leq i < j \leq r\ , \\ \tilde{x} \in \Omega \subset B^n\ . \end{cases} \tag{2}$$

Число бикритериальных задач (2), порождаемых задачей (1), равно C_r^2 [23].

Представим МГ для (2) в виде булевой квадратной матрицы: $a_{pq} = \begin{cases} 1, \text{ если } q > p, \\ 0, \text{ если } p \geq q, \end{cases}$

верхний треугольник матрицы содержит информацию о критерии i, нижний – о критерии j.

3.3 **Распознавание подмножеств**

Будем рассматривать распознавание подмножества некоторого конечного множества как задачу дихотомии в РО. Применим для решения задачи дихотомии модели обучения, позволяющие извлекать знания из эмпирических данных [9, 21, 24]. Пусть $A \subset C, C = A \bigcup \overline{A}, (\overline{A} = C \setminus A)$. Если C задано точно и известны элементы одного из покрывающих C подмножеств, то элементы другого могут быть однозначно определены [25, 26]. Пусть разбиение $C = A \bigcup \overline{A}$ представлено неполной информацией $I_0(A, \overline{A})$ в виде булевой обучающей таблицы T, $T = A_1 \bigcup A_2$:

$$(\tilde{a} \in A_1) \Rightarrow (\tilde{a} \in A),$$
$$(\tilde{a} \in A_2) \Rightarrow (\tilde{a} \in \overline{A}).$$

Таблица T непротиворечива: $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$.

Пусть элемент $\tilde{x} \in C$ определен некоторым описанием $I(\tilde{x})$ (набором значений характеристик). Задача распознавания подмножества заключается в вычислении предиката $\tilde{x} \in A, (\tilde{x} \in \overline{A})$ по $I_0(A, \overline{A})$ и $I(\tilde{x})$ [15,16].

3.3.1 **Бинарные решающие деревья**

Для решения задачи распознавания будем использовать алгоритмы обучения, основанные на построении бинарных решающих деревьев (БРД). Указанные алгоритмы позволяют получить описания классов (подмножеств) в виде логических формул.

Будем рассматривать элементы $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ множества B^n в задаче (1) как двоичные наборы *признаков*. Тогда $\{x_i : Y \to \{0,1\}\}, i = \overline{1,n}$ – множество значений *признаковых предикатов*, где Y – множество состояний, описывающее некоторую предметную область.

БРД – это бинарное дерево, обладающее следующими свойствами:

- внутренние вершины помечены признаковыми предикатами;
- исходящие ребра помечены значениями предиката;
- концевые вершины (листья) помечены метками классов;
- ни в одной ветви нет вершин с одинаковыми признаками.

В задаче распознавания подмножества БРД реализует отображение $BDT_{SET}(C)$: $C \to \{A, \overline{A}\}$. Это отображение представляет собой систему двух функций двузначной логики. Используя БРД, можно синтезировать любую функцию двузначной логики. Обратно, любое БРД можно задать в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) [3].

3.3.2 Распознавание множества допустимых решений

Пусть $T \subset B^n$ есть непротиворечивая таблица обучения. T состоит из элементов множества $\Re = \{\tilde{x}^*\}$ выбранных экспертами альтернатив.

$$\Re = \Re_0 \cup \Re_1,$$
$$\Re_0 \cap \Re_1 = \varnothing,$$
$$(\tilde{x} \in \Re_0) \Rightarrow (\tilde{x} \in \Omega),$$
$$(\tilde{x} \in \Re_1) \Rightarrow (\tilde{x} \notin \Omega).$$

В [3,16] описан рекурсивный алгоритм построения *допустимого* разбиения B^n на интервалы $N_1,...,N_\mu$. Допустимым считается такое разбиение, что каждый интервал содержит наборы только одного класса из T и $\bigcup_{q=1}^{\mu} N_q = B^n$. Показано, что интервалам $N_1,...,N_\mu$. допустимого разбиения соответствуют конъюнкции $k_1,...,k_\mu$: $\bigvee_{q=1}^{\mu} k_q = 1$, а все разбиение может быть задано *допустимым* БРД, каждая ветвь которого задает k_i (μ - число листьев этого БРД). Используя допустимое БРД, можно получить приближенное логическое описание $\hat{\psi}(\tilde{x})$ множества Ω в виде ДНФ и, следовательно, вычислить значение основного предиката "$\tilde{x} \in P$" для любого элемента из B^n.

В [3] также показано, что представление подмножеств B^n в виде БРД не единственно и зависит от числа $\mu+1$ его внутренних вершин. Введено понятие кратчайшего (по числу μ) БРД, обусловливающего выбор решающего правила среди кратчайших БРД.

3.3.3 Распознавание множества Парето

Многие многокритериальные задачи сводятся к аппроксимации множества Парето P, $P \subset \Omega$ [5,6,7]. В условиях неполноты исходной информации аппроксимация P может быть сведена к задаче распознавания P по БО предпочтения по всем критериям и таблице обучения T:

$$T = W_0 \cup W_1 : W_0 \cap W_1 = \varnothing,$$
$$(\tilde{x} \in W_0) \Rightarrow (\tilde{x} \in P),$$
$$(\tilde{x} \in W_1) \Rightarrow (\tilde{x} \notin P).$$

Предлагаемый ниже метод распознавания множества Парето основан на рассмотрении множеств Парето P_{ij} бикритериальных задач (2).

Рассмотрим некоторые важные свойства паретовских множеств [22].

Лемма 1. *Если существует непустое пересечение паретовского множества P задачи (1) с паретовскими множествами P_{ij} некоторых бикритериальных задач (2) и решение $\tilde{x} \in P$, то оно принадлежит также и множеству Парето хотя бы одной из задач (2):*

$$(P \cap P_{ij} \neq \varnothing) \wedge (\tilde{x} \in P) \Rightarrow (\exists i \neq j : \tilde{x} \in P_{ij}).$$

Доказательство. Пусть данное утверждение неверно. Тогда $\exists \tilde{x}' : \exists k \in \{i, j\} : \tilde{x}' \overset{k}{>} \tilde{x}$, что противоречит неулучшаемости точки $\tilde{x} \in P$.

Лемма 2. *Непустое пересечение множеств парето-оптимальных решений бикритериальных задач (2), при всех возможных комбинациях i и j, образует подмножество множества парето-оптимальных решений многокритериальной задачи (1):* $\bigcap_{\{(i,j)\}} P_{ij} \subseteq P$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in \bigcap_{\{(i,j)\}} P_{ij} \subseteq P$. Тогда, если предположить, что $\tilde{x} \notin P$, то $\tilde{x}$ можно улучшить хотя бы по одному критерию. Согласно лемме 1,

$$(\tilde{x} \notin P) \Rightarrow \forall i \neq j, \tilde{x} \notin P_{ij},$$

$$\tilde{x} \in \bigcup_{\{(i,j)\}} \overline{P}_{ij} \Leftrightarrow \tilde{x} \in \overline{\bigcap_{\{(i,j)\}} P_{ij}},$$

что противоречит условию. Таким образом, если $\tilde{x} \in \bigcap_{\{(i,j)\}} P_{ij}$, то $\tilde{x}$ ни по одному критерию улучшить невозможно.

Из лемм 1, 2 вытекает следующая

Теорема. *Пересечение паретовских множеств всех бикритериальных задач (2), которые можно выделить из задачи (1), образует подмножество паретовского множества задачи (1), которое, в свою очередь, является подмножеством объединения паретовских множеств бикритериальных задач(2):* $\bigcap_{\{(i,j)\}} P_{ij} \subseteq P \subseteq \bigcup_{\{(i,j)\}} P_{ij}$.

Таким образом, аппроксимация паретовских множеств P_{ij} для всех возможных задач (2) позволяет определить верхнюю и нижнюю границы множества Парето:

$$P_{\inf} \subseteq P \subseteq P_{\sup}, \ P_{\inf} = \bigcap_{\{(i,j)\}} P_{ij}, \ P_{\sup} = \bigcup_{\{(i,j)\}} P_{ij}.$$

В [22] приведен алгоритм аппроксимации множества Парето для задачи (2), основанный на анализе МГ и представляющей его матрицы.

Вообще говоря, $P_{\sup}$ может содержать непаретовские точки, $\tilde{x} \in P_{\sup}$, $\tilde{x} \notin P$. В [21] показано, что алгоритмы обучения, основанные на синтезе БРД, позволяют получить логическое описание множества Парето, проверить неулучшаемость решений $\tilde{x} \in P_{\sup}$ и (если необходимо) удалить непаретовские точки.

3.3.4 **Интерактивный алгоритм аппроксимации множества Парето**

Предлагается следующий алгоритм аппроксимации паретовского множества:

1. Сформировать обучающее множество $W=\{W_0 \cup W_1\}$, где W_0 содержит только непаретовские, W_1 – только паретовские точки (экспертные оценки).

2. Синтезировать БРД, реализующее отображение $BDT_{SET}(\Omega)$: $\Omega \to \{P, \overline{P}\}$ (P – паретовское множество).

3. Построить приближенное решающее правило $\hat{\varphi}(\tilde{x}) = "\tilde{x} \in P"$ в виде ДНФ.

4. Построить $P_{\sup}$. Для всех $\tilde{x} \in P_{\sup}$ вычислить предикат $"\tilde{x} \in P"$.

5. Представить решающее правило выбора паретовских решений в виде $F(\tilde{x}) = \hat{\varphi}(\tilde{x}) \,\&\, \hat{\psi}(\tilde{x})$, $где \hat{\varphi}(\tilde{x}) = "\tilde{x} \in P"; \hat{\psi}(\tilde{x}) = "\tilde{x} \in \Omega"$.

Схема алгоритма показана на рис. 2.

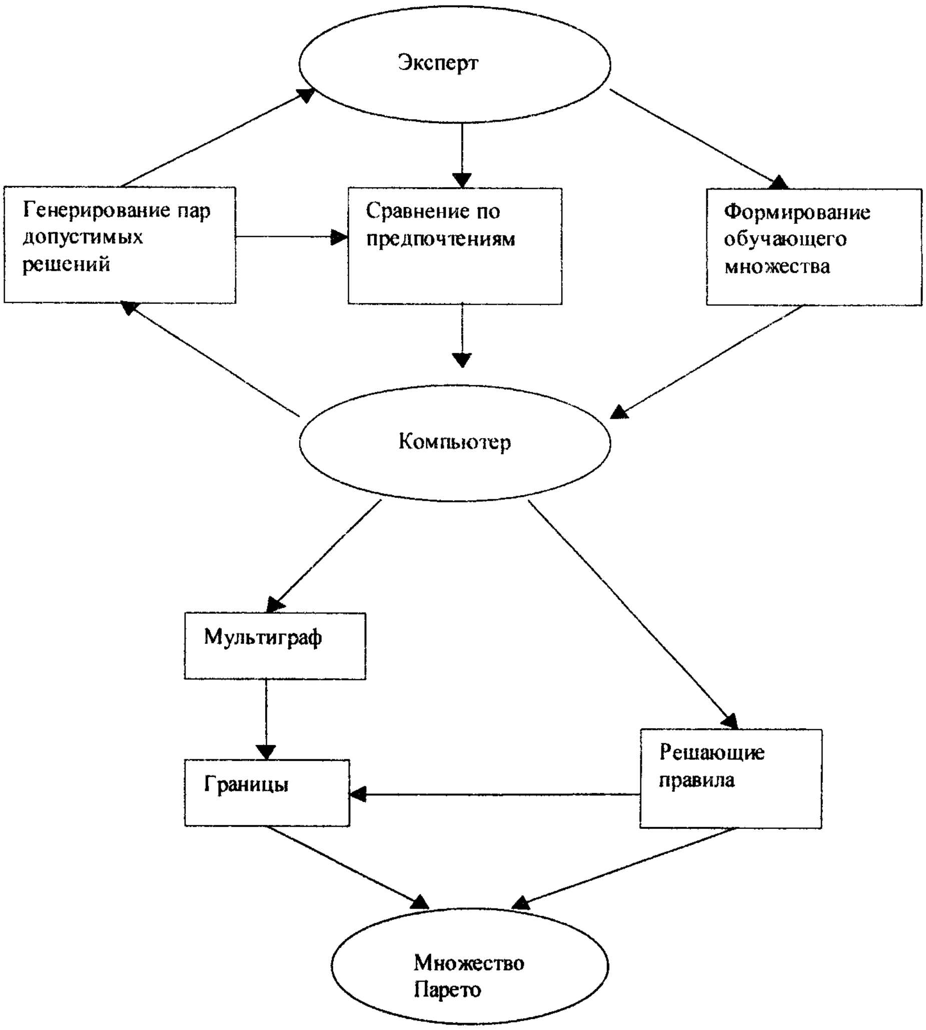

Рис. 2 Схема интерактивного алгоритма аппроксимации паретовского множества.

Автор выражает свою признательность доценту И. А. Переходу за полезные замечания.

Литература.

1. Ларичев О., Мошкович Е. Качественные методы принятия решений. – Москва: Наука, 1996. – 208 с.
2. Юдин Д. Вычислительные методы теории принятия решений. – Москва: Наука, 1989. – 320 с.
3. Донской В., Башта А. Дискретные модели принятия решений при неполной информации. Симферополь: Таврия, 1992. – 165 с.
4. Keeney, R., Raiffa, H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. – New York, etc. : John Wiley & Sons, Inc., 1976. – 569 p.
5. Steuer, R. Multiple Criteria Optimization. – New York, etc.: John Wiley & Sons, Inc., 1986. – 546 p.
6. Ларичев О. Объективные модели и субъективные решения. – Москва: Наука, 1987. – 142 с.
7. Подиновский В., Ногин В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 254 с.
8. Pawlak, Z., Grzymala-Busse, J., Slowinski, R., Ziarko, W. Rough Sets. // CACM. – 1995.–№38(11). – P. 89-95.
9. Langley, P., Simon, H. Applications of Machine Learning and Rule Induction. // CACM. –1995.–№38(11). – P. 55-64.
10. Tou, J., Gonzales, R. Pattern Recognition Principles. – Massachusetts, etc.: Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1974. – 377 p.
11. Орлов В. Граф-схемы алгоритмов распознавания. – Москва: Наука, 1982. – 117 с.
12. Sun M., Stam, A., Steuer, R. Solving Multiple Objective Programming Problems Using Feed-forward Artificial Neural Networks: the Interactive FFAN Procedure.// Man. Sci. – 1996.– №42(6).–P. 835-849.
13. Ignizio, J., Back, W. An alternative Neural-network Architecture and Training Algorithm. // Journal of Artificial Neural Network .– 1994 №1(2) – P. 262-282.
14. Ignizio, J., Back, W. Knowledge Programming Meets Linear Programming II. // PC AI.– Jan-Feb. 1993.– P. 45-49.
15. Донской В. Слабоопределенные задачи линейного булева программирования с частично заданным множеством допустимых решений. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988.– № 28(9) .– С. 1379-1388.
16. Донской В. Алгоритмы обучения, основанные на построении решающих деревьев. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1982.– №22(4).– С. 963-974.
17. Ehtamo, H. et al. Generating Pareto Solutions in Two-party Negotiations by Ajusting Artificial Constraints. // Man Sci. (unpublished research).

18. Nakayama, H., Machine Learning as a DSS and Multi-Objective Problems. // Proceedings of the International Conference on Methods and Applications of Multicriteria Decision Making, Mons, Belgium: 1997.– P. 131-134.
19. Donskoy, V., Perekhod, A. On the Multicriteria Optimization Problem With Incomplete Information About Criteria. // Abstracts of the International Conference on Multiobjective Programming. Malaga, Spain, May 16-18 1996.– P. 52-53.
20. Donskoy, V., Perekhod, A. On Pseudo-Boolean Optimization Problem With Incomplete Information. // Advances in Multiple Objective and Goal Programming. Proceedings of the Second International Conference on Multiobjective and Goal Programming. Torremolinos, Spain, May 16-18, 1996.: Rafael Caballero et al.(ed). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.– № 455.– Berlin: Springer-Verlag, 1997.– P. 197-200.
21. Perekhod, A. Set Recognition in the MCDM Problems. // Proceedings of the International Conference on Methods and Applications of Multicriteria Decision Making, Mons, Belgium: 1997.– P. 366-369.
22. Переход А. Алгоритм аппроксимации множеств парето-оптимальных решений на мультиграфах. // Программы, системы, модели. Выпуск 2. Симферополь.–1996.– С. 18-26.
23. Гамкрелидзе Л., Остроух Е. Метод решения дискретных задач многокритериальной оптимизации. // Известия АН СССР. Серия техническая кибернетика. – 1989. - № 3. - С. 150-155.
24. Переход А. Многокритериальные модели принятия решений при неполной информации для интеллектуальных систем. // Тезисы Международной конференции по интеллектуальной обработке информации. Алушта. Крым. 3-7 июня 1996. – С. 27-28.
25. Закревский А. Логика распознавания. Минск: Наука. 1988. – 119 с.
26. Закревский А. Выявление импликативных зависимостей в булевом пространстве признаков и распознавание образов. // Кибернетика №1. – 1982. С. 1-6.