О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ НА ПЛОСКОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Персидский С. К., Дремов С. Ю.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = p_{s1}\varphi_1(x_1) + \cdots + p_{sn}\varphi_n(x_n) \quad (s = \overline{1,n}) \tag{1.1}$$

где p_{sk} – вещественные постоянные, а функции $\varphi_s(x_s)$ – непрерывны и $x_s\varphi_s(x_s) > 0$ при $x_s \neq 0$ $(s = \overline{1,n})$.

Пусть P – матрица коэффициентов системы и $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – некоторый конус пространства R^n, определенный параметрами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ [1]. Заметим, что если точка $x(x_1,\ldots,x_n) \in \in Int\ K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ то $\alpha_s = sign\, x_s$ $(s = \overline{1,n})$.

Назовем матрицу P квазипозитивной, если ее элементы связаны с параметрами некоторого конуса неравенствами

$P_{sk}\alpha_s\alpha_k \geq 0$ при $s \neq k$ $(s = \overline{1,n})$.

Уравнение

$$\det(P - \lambda E) = 0 \tag{1.2}$$

будем в дальнейшем называть «характеристическим» уравнением системы (1.1).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть P – квазипозитивная матрица, тогда для абсолютной устойчивости системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.1) имели отрицательные вещественные части.

Выполнение необходимых условий теоремы очевидно, докажем достаточность.

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – произвольно взятые положительные числа и $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – параметры соответствующего конуса. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ks} b_s \alpha_s = -\alpha_s a_s \quad (s = \overline{1,n}) \tag{1.3}$$

Очевидно, что ее можно представить в виде

$$\sum_{k=1,\,k\neq s}^{n} |P_{ks}| b_k + P_{ss} b_s = -a_s \quad (s = \overline{1,n}) \tag{1.4}$$

В рассматриваемом случае все корни характеристического уравнения (1.2) имеют отрицательные вещественные части, поэтому система (1.3), а, следовательно, и система (1.4) разрешима, при этом найденные из системы (1.3) числа b_s будут положительными [1].

Положим $V(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=1,k\neq s}^{n} b_s x_s \, sign x_s=\sum_{s=1}^{n} b_s |x_s|$, тогда в R^n из (1.4) следует, что

$$'_{(1)}\leq\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1,\,k\neq s}^{n}|P_{ks}|b_k+P_{ss}b_s\right)x_s \, sign\, x_s=-\sum_{s=1}^{n}a_s|x_s|,$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Пусть матрица P не является квазипозитивной и имеет отрицательные диагональные элементы. Если при этом она является матрицей с диагональным преобладанием по столбцам, т.е. при некоторых положительных $b_1,\ldots,b_n$ имеют место неравенства

$$\sum_{k=1,\,k\neq s}^{n}|P_{sk}|b_k+P_{ss}b_s<0\quad (s=\overline{1,n})\tag{1.5}$$

то система (1.1) и в этом случае будет устойчива абсолютно. Действительно, опять положим $(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{s=1}^{n}b_s x_s \, sign\, x_s$. Тогда из (1.5) следует, что $'_{(1)}$ будет функцией отрицательно знакоопределенной.

Рассмотрим далее систему дифференциальных уравнений

$$x'_s=\sum_{s=1}^{n}P_{sk}\varphi_k(x_k)+F_s(\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n))\quad (s=\overline{1,n}),\tag{1.6}$$

где $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяет сделанным предположениям, а функции $F_s(u_1,\ldots,u_n)$ в окрестности начала координат разлагаются в ряды по степеням $u_1,\ldots,u_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка.

Вместе с системой (1.6) будем рассматривать соответствующую систему уравнений

$$x'_s=\sum_{s=1}^{n}P_{sk}\varphi_k(x_k)\quad (s=\overline{1,n})\tag{1.7}$$

Теорема 2. Пусть относительно некоторого конуса $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ матрица P системы (1.7) является квазипозитивной и все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, тогда нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво в некоторой окрестности начала координат.

Действительно, положим в уравнениях (1.3) $a_1=\cdots=a_n=1$ и определим из этой системы $b_1>0,\ldots,b_n>0$. Возьмем $(x)=\sum_{s=1}^{n}b_s|x_s|$, тогда в силу системы (1.6)

$$'_{(6)} \le -\sum_{s=1}^{n} |\varphi_s(x_s)| + \sum_{s=1}^{n} b_s |F_s(\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n))| < 0$$

в достаточно малой окрестности начала координат, и мы получаем модификацию известной теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Из приведенных выше результатов следует, что имеется определенная близость свойств решений нелинейной системы (1.1) по отношению к соответствующей линейной системе, получаемой из (1.1) при $\varphi_s(x_s) = x_s \quad (s = \overline{1,n})$. Поэтому естественно было рассмотреть поведение системы (1.1) на плоскости, т.е. при n=2 и сравнить их с поведением траекторий соответствующей линейной системы. Указанная задача решалась с помощью ПЭВМ.

Почти полное совпадение фазовых портретов линейной и соответствующей нелинейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}\varphi_1(x_1) + p_{12}\varphi_2(x_2); \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}\varphi_1(x_1) + p_{22}\varphi_2(x_2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

наблюдается в случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, где $\varphi(z)$ – нечетная, монотонно возрастающая функция своего аргумента, например, $\varphi(z) = z^{2k+1}, \varphi(z) = z\,(1+z^{2k})$ и т.д. При этом функция $\varphi(z)$ может иметь или вообще не иметь линейных членов.

Причем характер поведения траекторий системы (1.8), как и в линейном случае, полностью определяется корнями соответствующего характеристического уравнения и при этом сохраняется классификация фазовых портретов, имеющая место для линейных систем (в случае чисто мнимых корней характеристического уравнения полагаем, что $p_{11} = p_{22} = 0$).

Впервые эта задача рассматривалась в работе [1].

На рис. 1 – 9 приведены некоторые фазовые портреты нелинейной системы (1.8) и соответствующей линейной системы для случаев монотонно возрастающих функций.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 + y^3 \\ \dot{y} = x^3 - 2y^3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -3$

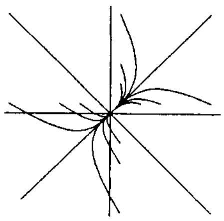


Рис. 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -3$

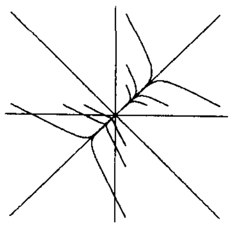


Рис. 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$
$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = -1$

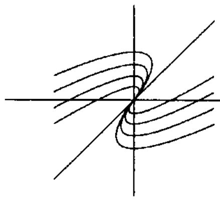


Рис. 3

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 + y^3 \\ \dot{y} = -x^3 \end{cases}$$
$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = -1$

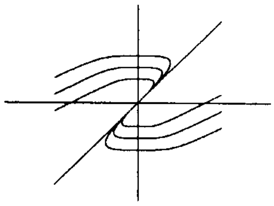


Рис. 4

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$
$\lambda_1 = 1 + 3i$
$\lambda_2 = 1 - 3i$

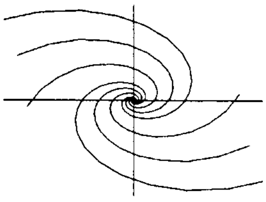


Рис. 5

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 4y^3 \\ \dot{y} = 2x^3 + y^3 \end{cases}$$
$\lambda_1 = 1 + 3i$
$\lambda_2 = 1 - 3i$

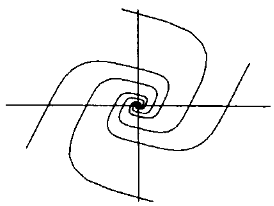


Рис. 6

$$\begin{cases} \dot{x} = 1/4x \\ \dot{y} = -1/9y \\ \lambda_1 = 1/6i \\ \lambda_2 = -1/6i \end{cases}$$

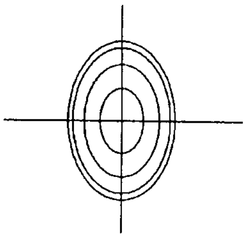


Рис. 7

$$\begin{cases} \dot{x} = 1/4x^3 \\ \dot{y} = -1/9y^3 \\ \lambda_1 = 1/6i \\ \lambda_2 = -1/6i \end{cases}$$

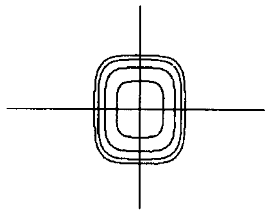


Рис. 8

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x^2)x \\ \dot{y} = 2(1 + x^2)x - (1 + y^2)y \end{cases}$$
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$

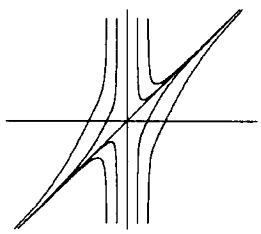


Рис. 9

Затем перейдем к рассмотрению конечно-разностного аналога системы (1.1) вида

$$x_s(m+1) = a_{s1}\varphi_1(x_1(m)) + \dots + a_{sn}\varphi_n(x_n(m)) \quad (s = \overline{1,n}) \tag{2.1}$$

где a_{sk} – вещественные постоянные, а функции $\varphi_s(x_s)$ удовлетворяют условию $\varphi_s(x_s)x_s > x_s$ при $x_s \neq 0$ и непрерывны по своим аргументам x_s $(s = \overline{1,n})$.

Теорема 3. Пусть функции φ_s таковы, что $|\varphi_s(x_s)| \leq |x_s|$. Допустим, что параметры α_s некоторого конуса $K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ [1] и коэффициенты системы (2.1) связаны неравенством

$$a_{sk}\alpha_s\alpha_k \geq 0 \text{ при } s,k = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

Тогда для абсолютной устойчивости решений системы (2.1) необходимо и достаточно [3] существования всех корней «характеристического» уравнения

$$\det(A-\mu E)=0 \qquad (2.3)$$

μ_s с модулями, меньшими 1.

Необходимость условий теоремы очевидна, так как система (2.1) должна быть асимптотически устойчива и при $\varphi_s(x_s)=x_s \quad (s=\overline{1,n})$, откуда следует, что все $|\mu_j|<1 \quad (j=\overline{1,n})$.

Для доказательства достаточности допустим, что все $|\mu_j|<1$. Определим числа $b_1,\dots,b_n$ из системы уравнений

$$\sum_{k=1,\,k\neq s}^{n}|a_{ks}|b_k+(a_{ss}-1)b_s=-a_s \quad (s=\overline{1,n}) \qquad (2.4)$$

где $a_s>0$. Из [3] следует, что все числа $b_s>0$.

Положим $(x)=\sum_{s=1}^{n}b_sx_s\,sign\,x_s$. Из (2.4) следует, что

$$\Delta V_{m_{(2.1)}}=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ks}|b_k+(a_{ss}-1)b_s\right)|x_s(m)|=-\sum_{s=1}^{n}a_s|\varphi_s(x_s(m))| \qquad (2.5)$$

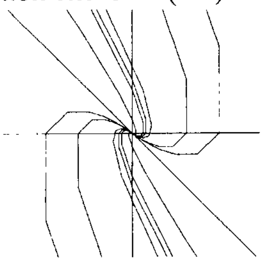
что и доказывает теорему.

Таким образом, решения системы (2.1) обладают относительно понятия асимптотической устойчивости свойствами, аналогичными свойствам соответствующей линейной системы

$$x_s(m+1)=a_{s1}x_1(m)+\cdots a_{sn}x_n(m) \quad (s=\overline{1,n}) \qquad (2.6)$$

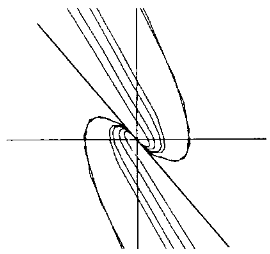
При n=2 поведение траекторий системы (2.6) хорошо изучены [4].

Ниже приведены некоторые фазовые портреты нелинейной системы (2.1) при $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, где $\varphi(z)z>0$ при $z\neq0$ и $|\varphi(z)|\le|z|$ (в частности, можно положить $\varphi(z)=\frac{z\,|z|}{1+|z|},\ \varphi(z)=\frac{z\,(z^2+1)}{1+(z^2+1)}$ и т.д.) и соответствующей линейной конечно-разностной системы (2.6).



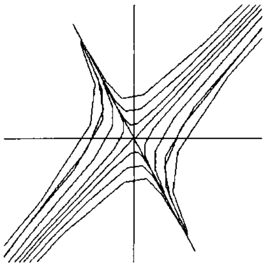
$$\begin{cases}x(m+1)=x(m)-y(m)\\ y(m+1)=x(m)+3y(m)\end{cases}$$

$\lambda_{1,2}=2$



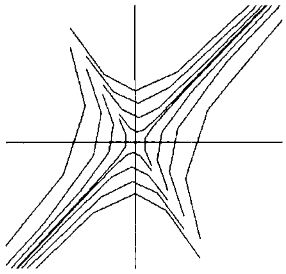
$$\begin{cases}x(m+1)=\dfrac{x(m)(1+|x(m)|)}{2+|x(m)|}-\dfrac{y(m)(1+|y(m)|)}{2+|y(m)|}\\[2ex] y(m+1)=\dfrac{x(m)(1+|x(m)|)}{2+|x(m)|}+3\dfrac{y(m)(1+|y(m)|)}{2+|y(m)|}\end{cases}$$

$\lambda_{1,2}=2$



$$\begin{cases} x(m+1) = 2.5x(m) + y(m) \\ y(m+1) = 2x(m) + 1.7y(m) \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = 2.1 \pm \sqrt{2.16}$$



$$\begin{cases} x(m+1) = 2.5\dfrac{x(m)(1+|x(m)|)}{2+|x(m)|} + \dfrac{y(m)(1+|y(m)|)}{2+|y(m)|} \\ y(m+1) = 2\dfrac{x(m)(1+|x(m)|)}{2+|x(m)|} + 1.7\dfrac{y(m)(1+|y(m)|)}{2+|y(m)|} \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = 2.1 \pm \sqrt{2.16}$$

Литература

1. Персидский С.К. К исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. ПММ, том 34, 1970 год, с. 219 – 226.
2. Персидский С.К., Дремов С.Ю. Поведение на плоскости траекторий одной нелинейной системы. Тезисы докладов международной конференции «Modeling and investigation of system stability», Киев, 1997 год, с. 81 – 82.
3. Персидский С.К. Исследование устойчивости решений одной нелинейной системы в конечных разностях. Дифференциальные уравнения и их приложения. Издание Казахского госуниверситета, Алма-Ата, 1979 год.
4. Пьер Видаль. Нелинейные импульсные системы. «Энергия», Москва, 1974 год, с. 270.