УДК 517.98

ПРИНЦИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ШКАЛАХ ПРОСТРАНСТВ: ТЕОРЕМА ХАНА-БАНАХА

Орлов И.В.[1]

Теорема Хана-Банаха и ее основные следствия перенесены на линейные индуктивные шкалы топологических векторных пространств. Для нелинейных шкал получен ослабленный вариант теоремы.

Ключевые слова: теорема Хана-Банаха, шкала пространств, шкала гиперплоскостей, функциональная шкала.

Введение

Открытые С.Г. Крейном и Ж. Лионсом шкалы гильбертовых и банаховых пространств и соответствующие функциональные и операторные шкалы (см. определения и обзор литературы в [1]) получили в последние десятилетия широкое признание. В настоящее время потребности практики приводят к исследованию общих шкал топологических векторных пространств [2].

Характерной особенностью в применениях индуктивных шкал является то обстоятельство, что переход к индуктивному пределу часто приводит к потере важных свойств шкалы. Таким образом, возникает потребность в переносе основных принципов функционального анализа непосредственно на шкалы пространств и операторов.

Мы покажем, что теорема Хана-Банаха может быть перенесена на линейные шкалы пространств. Для нелинейных шкал это не так, однако справедлив ослабленный вариант теоремы. По поводу приложений для дифференциального исчисления в шкалах см. [3].

ИНДУКТИВНЫЕ ШКАЛЫ ПРОСТРАНСТВ, ПОДМНОЖЕСТВ И ФУНКЦИОНАЛОВ

Для простоты изложения мы рассматриваем здесь только внутренние шкалы (с тождественными вложениями); общие определения см. в ([2], гл.I).

Индуктивной шкалой топологических векторных пространств (ТВП) (в частности – локально выпуклых пространств (ЛВП)) назовем систему ТВП (ЛВП) $\dot{E} = \{E_i\}_{i \in I}$, индуктивно упорядоченную по непрерывному вложению: $(i_1 \le i_2) \Longrightarrow (E_{i_1} \subseteq E_{i_2})$.

[1] Кафедра математического анализа

Носитель шкалы $E = |\vec{E}|$ есть объединение всех пространств шкалы. Шкала $\vec{E}$ *отделима*, если любая точка $x \in E$, $x \neq 0$, отделима от нуля в некотором E_i, $i = i(x)$. Две шкалы ТВП $\vec{E} = \{E_i\}_{i\in I}$ и $\vec{F} = \{F_j\}_{j\in J}$ *эквивалентны*, если каждое E_i непрерывно вложено в некоторое F_j, и обратно. Очевидно, при этом $|\vec{E}| = |\vec{F}|$. Всюду далее шкалы пространств рассматриваются с точностью до эквивалентности. Шкала ТВП $\vec{E}$ *линейна*, если порядок в I линеен (с точностью до эквивалентности). Отметим, что большинство шкал пространств, применяемых в современной математике, линейны (см. [1], [2]). *Шкалой подмножеств* в $\vec{E}$ назовем систему $\vec{A} = \{A_i | A_i \subset E_i\}_{i\in I}$, такую, что $(i_1 \le i_2) \Rightarrow (A_{i_2} \cap E_{i_1} = A_{i_1})$. В частности, $\vec{\varnothing}$ – шкала пустых подмножеств. *Объединение*, *пересечение* и *включение* для шкал подмножеств $\vec{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, $\vec{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ в $\vec{E}$ определяются покоординатно:

$$\vec{A} \cup \vec{B} = \{A_i \cup B_i\}_{i\in I},\ \vec{A} \cap \vec{B} = \{A_i \cap B_i\}_{i\in I},\ (\vec{A} \subset \vec{B}) \Leftrightarrow (A_i \subset B_i, i \in I).$$

Носитель шкалы подмножеств $A = |\vec{A}|$ есть объединение всех множеств шкалы. *Функциональной шкалой* на $\vec{E} : \vec{f} \in \vec{E}^*$ назовем систему линейных непрерывных функционалов $\vec{f} = \{f_i | f_i \in E_i^*\}_{i\in I}$, такую, что $(i_1 \le i_2) \Rightarrow (f_{i_2}(x) = f_{i_1}(x)$ при $x \in E_{i_1}$).

Функциональный образ шкалы подмножеств $\vec{A}$ в $\vec{E}$ относительно функциональной шкалы $\vec{f}$ есть множество $\vec{f}(\vec{A}) = \bigcup_{i\in I} f_i(A_i)$. Наконец, назовем шкалу подмножеств $\vec{A}$ *слабо замкнутой* в $\vec{E}$, если $(x \in A_i,\ i \in I) \Leftrightarrow (f_i(x) \in f_i(A_i)$ при любом $\vec{f} = \{f_i\}_{i\in I} \in \vec{E}^*$).

ТЕОРЕМА ХАНА-БАНАХА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ШКАЛ ТВП

Покажем, что классическая теорема Хана-Банаха в ее геометрической форме естественным образом переносится на линейные шкалы ТВП.

Теорема 1. *Пусть $\vec{E}$ – линейная шкала ТВП.*

(1). Если $\vec{F}$ – шкала аффинных подпространств в $\vec{E}$, $\vec{A}$ – шкала выпуклых открытых подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{F} \cap \vec{A} = \vec{\varnothing}$, то найдется такая шкала $\vec{H}$ замкнутых гиперплоскостей в $\vec{E}$, что $\vec{H} \supset \vec{F}$ и $\vec{H} \cap \vec{A} = \vec{\varnothing}$.

(2). Если $\vec{E}$ – вещественная шкала, $\vec{F}$ – шкала векторных подпространств в $\vec{E}$, $\vec{A}$ – шкала собственных выпуклых открытых подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{F}\bigcap\vec{A}=\vec{\varnothing}$, то найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$ на $\vec{E}$, что $\vec{f}(\vec{F})=0<\vec{f}(\vec{A})$.

Доказательство. Пусть $\vec{E}=\{E_i\}_{i\in I}$, $\vec{F}=\{F_i\}_{i\in I}$, $\vec{A}=\{A_i\}_{i\in I}$. В силу известной порядковой леммы ([4], гл.III, §2) I можно считать вполне упорядоченным; обозначим через i_0 начальный индекс I.

(1). Пусть $t(i_0)$ – сильнейшая локально выпуклая топология в $E=|\vec{E}|$, в которой вложение $E_{i_0}\subseteq E$ непрерывно. Тогда $A=|\vec{A}|$ открыто в $(E,t(i_0))$, $F^{i_0}=|\vec{F}|$ – аффинное подпространство E, и $F^{i_0}\bigcap A=\varnothing$. Їрименяя классическую теорему Хана-Банаха ([5], гл.II), найдем такую замкнутую в $(E,t(i_0))$ гиперплоскость $H^{i_0}\supset F^{i_0}$, что $H^{i_0}\bigcap A=\varnothing$. Òогда $H_{i_0}=H^{i_0}\bigcap E_{i_0}$ – замкнутая гиперплоскость в E_{i_0}; $H_{i_0}\bigcap A=\varnothing$; $(H_{i_0}+F_i)\bigcap A_i=\varnothing$ їри $i\geq i_0$.

Предположим, по трансфинитной индукции, что для всех $k<i_1\in I$ построены такие замкнутые гиперплоскости H_k в E_k, что $H_k\bigcap A=\varnothing$, $(H_k+F_i)\bigcap A_i=\varnothing$ їри $i\geq k$, $H_i\subset H_k$ при $i\leq k$. Пусть $t(i_1)$ – сильнейшая локально выпуклая топология в E, в которой вложение $E_{i_1}\subseteq E$ непрерывно. Тогда A открыто в $(E,t(i_1))$, а множество

$$F^{i_1}=\left(\bigcup_{k<i_1}H_k\right)+\left(\bigcup_{i\geq i_1}F_i\right)=\bigcup_{k<i_1}\bigcup_{i\geq i_1}(H_k+F_i)$$

является аффинным подпространством E, и из допущения индукции следует $F^{i_1}\bigcap A=\varnothing$. Їрименяя теорему Хана-Банаха, найдем такую замкнутую в $(E,t(i_1))$ гиперплоскость $H^{i_1}\supset F^{i_1}$, что $H^{i_1}\bigcap A=\varnothing$. Òогда $H_{i_1}=H^{i_1}\bigcap E_{i_1}$ – замкнутая гиперплоскость в E_{i_1}, $H_{i_1}\bigcap A=\varnothing$, $(H_{i_1}+F_i)\bigcap A_i=\varnothing$ при $i\geq i_1$, $H_k\subset H_{i_1}$ при $k<i_1$.

Таким образом, согласно принципу трансфинитной индукции, построена шкала замкнутых гиперплоскостей $\vec{H}=\{H_i\}_{i\in I}$ в $\vec{E}$, содержащая $\vec{F}$ и не пересекающаяся с $\vec{A}$.

(2). Применяя доказанное выше утверждение к шкале векторных подпространств $\vec{F}$ в $\vec{E}$, построим шкалу замкнутых однородных гиперплоскостей $\vec{H}=\{H_i\}_{i\in I}$ в $\vec{E}$, $\vec{H}\supset\vec{F}$, $\vec{H}\bigcap\vec{A}=\varnothing$.

Как известно ([5], гл.I), $H_i = \ker \widetilde{f}_i \in E_i^*$. Выберем произвольно $x_{i_0} \in E_{i_0} \setminus H_{i_0}$; для любого $x \in E$ существует единственное разложение $x = h + \lambda \cdot x_{i_0}$, $h \in H = |\vec{H}|$. Положим при $x \in E_i$: $f_i(x) = \lambda \cdot \widetilde{f}_{i_0}(x_{i_0})$. Тогда $H_i = \ker f_i$ ($i \in I$), и f_{i_1} – сужение f_{i_2} на E_{i_1} при $i_1 \le i_2$, т.е. $\vec{f} = \{f_i\}_{i \in I}$ – функциональная шкала на $\vec{E}$. При этом $\vec{f}(\vec{H}) = 0$, и т.к. $\vec{f}(\vec{A})$ – вещественный интервал, не содержащий 0, то можно считать, что $\vec{f}(\vec{A}) > 0$.

На случай линейных шкал переносятся основные следствия теоремы Хана-Банаха.

Следствие 1. *Если $\vec{E}$ – линейная шкала ТВП, то на $\vec{E}$ существует функциональная шкала $\vec{f} \neq \vec{0}$ тогда и только тогда, когда в $\vec{E}$ найдется шкала $\vec{A}$ собственных открытых выпуклых подмножеств.*

Доказательство. Если $\vec{f} \neq \vec{0}$ – функциональная шкала на $\vec{E}$, $\vec{f} = \{f_i\}_{i \in I}$, то множества $A_i = \{x \in E_i \mid |f_i(x)| < 1\}$ – выпуклые, открытые, собственные (начиная с некоторого i) подмножества E_i, образующие искомую шкалу $\vec{A}$.

Обратно, пусть $\vec{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ – шкала собственных открытых выпуклых подмножеств в $\vec{E}$. Тогда для некоторого $i_0 \in I$ найдется $x_{i_0} \in E_{i_0} \setminus A_{i_0}$, и по теореме 1 (ч.2), найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$ на $\vec{E}$, что $\vec{f}(x_{i_0}) = 0 < \vec{f}(\vec{A})$, т.е. $\vec{f} \neq \vec{0}$.

Следствие 2. *Если $\vec{E}$ – вещественная линейная шкала ТВП, $\vec{A}$ – шкала выпуклых открытых подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{B}$ – шкала выпуклых подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{A} \cap \vec{B} = \vec{\varnothing}$, то найдется такая функциональная шкала $\vec{f} \neq \vec{0}$ на $\vec{E}$ и $\alpha \in$ **R**, что $\vec{f}(\vec{A}) < \alpha \le \vec{f}(\vec{B})$.*

Доказательство. Если $\vec{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, $\vec{B} = \{B_i\}_{i \in I}$., то множества $K_i = A_i - B_i$ выпуклы и открыты в E_i ($i \in I$), образуют шкалу $\vec{K}$ и не содержат 0. Следовательно, по теореме 1 (ч.2), найдется такая функциональная шкала $\vec{f} \neq \vec{0}$ на $\vec{E}$, что $\vec{f}(\vec{K}) < 0$. Пусть $\alpha_i = \sup f_i(A_i)$ ($i \in I$); тогда α_i конечны и $f(A_i) \le \alpha_i \le f(B_i)$. Но т.к. $\vec{f} \neq \vec{0}$, то f_i открыты ($i \ge i_0$), откуда $f_i(A_i)$ открыты, и следовательно $f(A_i) < \alpha_i$. Применение теоремы Кантора к системе вложенных отрезков

$\{[\sup f_i(A_i);\inf f_i(B_i)]\}_{i\in I}$ приводит к искомому результату.

Следствие 3. *(1). Если $\vec{E}$ – вещественных линейная шкала ЛВП, $\vec{A}$ – шкала замкнутых выпуклых подмножеств в $\vec{E}$, $x_0 \in E\setminus A$, то на $\vec{E}$ найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$, что $\vec{f}(x_0) > \sup \vec{f}(\vec{A})$.*

(2). Если $\vec{E}$ – линейная шкала ЛВП, $\vec{A}$ – шкала замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств в $\vec{E}$, $x_0 \in E\setminus A$, то на $\vec{E}$ найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$, что $|\vec{f}(x_0)| > \sup|\vec{f}(\vec{A})|$.

Доказательство. (1). Фиксируем $i_0 \in I$ так, чтобы $x_o \in E_{i_0}$ и выберем на луче Ox_0 в E_{i_0} открытый векторный отрезок B_{i_0}, содержащий точку x_0 как неконцевую и не пересекающийся с A_{i_0}. Применяя следствие 2 к шкале замкнутых выпуклых подмножеств $\vec{A}$ и тривиальной шкале замкнутых подмножеств $\vec{B} = \{B_{i_0}\}$, найдем такую функциональную шкалу $\vec{f} \neq \vec{0}$ на $\vec{E}$ и $\alpha \in \boldsymbol{R}$, что $\vec{f}(\vec{A}) < \alpha \le \vec{f}(\vec{B})$. Так как $\vec{f}(\vec{B}) = f_{i_0}(B_{i_0}) = (a;b) \ni x_0$, то отсюда $\vec{f}(\vec{A}) < \alpha \le a < \vec{f}(x_0)$, и значит $\vec{f}(x_0) > \sup \vec{f}(\vec{A})$.

(2). Переход от (1) к (2) осуществляется стандартным образом (см. [5], 2.1.4).

Следствие 4. *Если $\vec{E}$ – линейная шкала ЛВП, $\vec{F}$ – шкала замкнутых подпространств в $\vec{E}$, $x_0 \in E\setminus F$, то на $\vec{E}$ найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$, что $\vec{f}(\vec{F}) = 0 \neq f(x_0)$.*

Доказательство. Достаточно применить следствие 3 (п.2) при $\vec{A} = \vec{F}$; мы получим $\sup|\vec{f}(\vec{F})| < |\vec{f}(x_0)|$, откуда $\vec{f}(\vec{F}) = 0$.

В частности, $\vec{F}$ есть пересечение всех содержаших ее шкал $\overrightarrow{H}$ замкнутых гиперподпространств в $\vec{E}$.

Следствие 5. *Если $\vec{E}$ – отделимая линейная шкала ЛВП, то точки $\vec{E}$ отделяются функциональными шкалами на $\vec{E}$.*

Доказательство. Так как E_i – отделимые ЛВП, то $\vec{F} = \{\{0\}_i\}_{i\in I}$ – шкала замкнутых подпространств в $\vec{E}$, и применяя следствие 4 при любом $x_0 \neq 0$, получаем $\vec{f}(x_0) \neq 0$.

Следствие 6. *Если $\vec{E}$ – линейная шкала ЛВП, то любая шкала $\vec{F}$ замкнутых выпуклых подмножеств в $\vec{E}$ слабо замкнута в $\vec{E}$.*

Доказательство. Если $\vec{E}$ – вещественная шкала, $x_0 \notin F = |\vec{F}|$, то по следствию 3 (п.1), найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$ на $\vec{E}$, что $\vec{f}(x_0) > \sup \vec{f}(\vec{A})$, откуда

$$x_0 \notin \bigcap_{\vec{f} \in \vec{E}^*} \vec{f}^{-1}(\overline{\vec{f}(\vec{F})}),$$

т.е. шкала $\vec{F}$ слабо замкнута в $\vec{E}$. Если же $\vec{E}$ – комплексная шкала, то достаточно заметить, что комплексное слабое замыкание совпадает с вещественным.

Следствие 7. *Если $\vec{E}$ – линейная шкала ЛВП, $\vec{F}$ – шкала замкнутых подпространств в $\vec{E}$, $\vec{f}$ – функциональная шкала на $\vec{F}$, то шкалу $\vec{f}$ можно продолжить до функциональной шкалы $\vec{f}_1$ на $\vec{E}$.*

Доказательство. Пусть $\vec{H}$ – шкала ядер $\vec{f}$ в $\vec{F}$, $x_0 \in F \setminus H$. Применяя следствие 4, найдем такую функциональную шкалу $\vec{f}'$ в $\vec{E}$, что $\vec{f}'(\vec{H}) = 0 \neq \vec{f}'(x_0)$. Тогда $\vec{f}'$ и $\vec{f}$ отличаются на $\vec{F}$ только скалярным множителем λ; шкала $\vec{f}_1 = \lambda \cdot \vec{f}'$ – искомая.

СЛАБАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ ХАНА-БАНАХА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ШКАЛ ЛВП

Если локально выпуклый индуктивный предел индуктивной шкалы ЛВП $\underrightarrow{\lim}\vec{E}$ тривиален: $(\underrightarrow{\lim}\vec{E})^* = \{0\}$, то в силу ([6], гл.II, 6.1) также и $(\vec{E})^* = \{\vec{0}\}$, а значит, результаты следствий 3–7 теоремы 1, связанные с функциональной отделимостью, не выполняются. Отметим, что в число таких шкал попадает и шкала сходимости почти всюду [7], [8]. Таким образом, теорема 1 не переносится на нелинейные шкалы ТВП.

Однако, ограничиваясь шкалами открытых выпуклых множеств, носители которых открыты в индуктивной топологии, нетрудно получить ослабленный вариант теоремы 1 для нелинейных шкал ЛВП.

Пусть $\vec{E}$ – индуктивная шкала ЛВП, $\vec{A}$ – шкала выпуклых открытых подмножеств в $\vec{E}$. Если для любой точки $x \in |\vec{A}|$ найдется такая шкала $\vec{U}^x$ абсолютно выпуклых окрестностей нуля в $\vec{E}$, что $x + \vec{U}^x \subset \vec{A}$, то назовем $\vec{A}$ *однородной шкалой.*

Теорема 2. *Пусть $\vec{E}$ – произвольная индуктивная шкала ЛВП.*

(1). Если $\vec{F}$ – шкала аффинных подпространств в $\vec{E}$, $\vec{A}$ – однородная шкала выпуклых открытых подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{F}\cap\vec{A}=\vec{\emptyset}$, то найдется такая шкала $\vec{H}$ замкнутых гиперплоскостей в $\vec{E}$, что $\vec{H}\supset\vec{F}$ и $\vec{H}\cap\vec{A}=\vec{\emptyset}$.

(2). Если $\vec{E}$ – вещественная шкала, $\vec{F}$ – шкала векторных подпространств в $\vec{E}$, $\vec{A}$ – однородная шкала собственных выпуклых открытых подмножеств в $\vec{E}$, $\vec{F}\cap\vec{A}=\vec{\emptyset}$, то найдется такая функциональная шкала $\vec{f}$ на $\vec{E}$, что $\vec{f}(\vec{F})=0<\vec{f}(\vec{A})$.

Отметим, что, при добавлении требования однородности шкалы $\vec{A}$, на нелинейный случай переносятся результаты следствий 1 и 2 из теоремы 1.

Список литературы

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
2. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. – Москва: Наука, 1994. – 336 с.
3. Orlov I.V. Hahn-Banach theorem in linear and nonlinear scales of the topological vector spaces // Spectral and evolutionary problems. Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. – 1997. – №7. – С.27–31.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. – 455 с.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – Москва: Мир, 1969. – 1072 с.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.
7. Orlov I.V. The space of measurable functions with almost everywhere convergence is a nonlinear scale of the locally convex spaces // Spectral and evolutionary problems. Proceedings of the Eighth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. – 1998. – №8. – С.45–51.
8. Орлов И.В. Сходимость почти всюду как сходимость в нелинейной индуктивной шкале локально выпуклых пространств // Ученые записки Таврического национального университета. – 2001. – (в печати).

Анотація

Орлов, І.В. Принципи функціонального аналізу в шкалах просторів: теорема Хана-Банаха // Вчені записки ТНУ, 2000, , No., –.

Теорема Хана-Банаха та її основні наслідки перенесені на лінійні індуктивні шкали топологічних векторних просторів. Для нелінійних шкал одержано послаблений варіант теореми.

Summary

Orlov, I. V. The principles of functional analysis in the scales of spaces: Hahn-Banach theorem // Uchenye zapiski TNU, 2000, , No., –.

Hahn-Banach theorem and its corollaries are transformed to the linear inductive scales of topological vector spaces. The weakened variant of the theorem is obtained for nonlinear scales.