ПРОСТРАНСТВО ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ДЕФЕКТНЫМИ ЧИСЛАМИ

Поречнов А. Ю., Карпенко И. И., кандидат физ.-мат. наук, доцент

В последнее время в теории расширений эрмитовых операторов используется подход, основанный на понятии пространств граничных значений (ПГЗ). Для эрмитовых операторов с равными дефектными числами описание ПГЗ получено в работах [1], [2].

В настоящей работе это понятие естественно обобщается на случай эрмитовых операторов с различными дефектными числами. Следует отметить, что предлагаемый подход существенно отличается от предложенных ранее в работах [3], [4].

Общие свойства пространства граничных значений.

Пусть A – замкнутый эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, которая не предполагается плотной в H. Не ограничивая общности, можем считать, что $D(A) \vee \Delta(A) = H$, где $\Delta(A)$ – множество значений оператора A.

Обозначим N_λ – дефектное подпространство, соответствующее числу λ $(H = N_\lambda \oplus \Delta(A - \lambda I)$, $n_+ = \dim N_i$, $n_- = \dim N_{-i}$ – дефектные числа и $\varepsilon = \operatorname{sign}(n_+ - n_-)$

Определение 1 Пятерка $(X, X', \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$, где X, X' – некоторые гильбертовы пространства, операторы $\Gamma_1, \Gamma_2 \in [N_\lambda \dot{+} N_{\bar{\lambda}}, X]$ $\Gamma \in [N_\lambda \dot{+} N_{\bar{\lambda}}, X']$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$, называется пространством граничных значений (п.г.з.) эрмитового оператора A, если :

1) для любых $x = x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}$, $y = y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}$ из $N_\lambda \dot{+} N_{\bar{\lambda}}$

$$(\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_X - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_X - 2\varepsilon i(\Gamma x, \Gamma y)_{X'} = (\lambda - \bar{\lambda})\left[(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}) - (x_\lambda, y_\lambda)\right], \tag{1}$$

2) для любых $\varphi, \psi \in X, \alpha \in X'$ в $N_\lambda \dot{+} N_{\bar{\lambda}}$ найдется такой элемент x, что

$$\Gamma_1 x = \varphi,\ \Gamma_2 x = \psi,\ \Gamma x = \alpha. \tag{2}$$

Удобно переписать определение в другом виде. Для этого обозначим $\tilde{X} = X \oplus X'$. Пусть операторы A_1, A_2 действуют из $N_\lambda \dot{+} N_{\bar{\lambda}}$ в X, X' соответственно. Тогда операторы вида $\tilde{A} = \langle A_1, A_2 \rangle$ действуют из $N_\lambda \dot{+} N_{\bar{\lambda}}$ в $\tilde{X}$ так: $\tilde{A}x = \langle A_1 x, A_2 x \rangle$.

Определение 2 Тройка $(\widetilde{X},\widetilde{\Gamma}_1,\widetilde{\Gamma}_2)$, где $\widetilde{X}=X\oplus X'$ – некоторое гильбертово пространство, операторы $\widetilde{\Gamma}_1=\langle\Gamma_1,\Gamma\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2=\langle\Gamma_2,\varepsilon i\Gamma\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_1,\widetilde{\Gamma}_2\in[N_\lambda\dot{+}N_{\bar\lambda},\widetilde{X}]$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$, называется пространством граничных значений (п.г.з.) эрмитового оператора А, если :

1) для любых $x=x_\lambda+x_{\bar\lambda}$, $y=y_\lambda+y_{\bar\lambda}$ из $N_\lambda\dot{+}N_{\bar\lambda}$

$$(\widetilde{\Gamma}_1x,\widetilde{\Gamma}_2y)_{\widetilde{X}}-(\widetilde{\Gamma}_2x,\widetilde{\Gamma}_1y)_{\widetilde{X}}=(\lambda-\bar\lambda)[(x_{\bar\lambda},y_{\bar\lambda})-(x_\lambda,y_\lambda)], \tag{3}$$

2) для любых $\langle\varphi,\alpha\rangle,\langle\psi,\varepsilon i\alpha\rangle\in\widetilde{X}$ в $N_\lambda\dot{+}N_{\bar\lambda}$ найдется такой элемент x, что

$$\widetilde{\Gamma}_1x=<\varphi,\alpha>,\widetilde{\Gamma}_2x=<\phi,i\varepsilon\alpha>. \tag{4}$$

Легко убедиться, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Предложение 1. 1) $\ker\widetilde{\Gamma}_1\cap\ker\widetilde{\Gamma}_2=\{0\}$,

2) $N_\lambda\dot{+}N_{\bar\lambda}=\ker\widetilde{\Gamma}_1\dot{+}\ker\Gamma_2=\ker\Gamma_1\dot{+}\ker\widetilde{\Gamma}_2$.

Предложение 2. $\dim\ker\widetilde{\Gamma}_k=\dim X \quad (k=\overline{1,2})$

Предложение 3. $\dim\ker\Gamma_k=\dim\widetilde{X} \quad (k=\overline{1,2})$

Возможны два случая : $\dim N_\lambda\geq\dim N_{\bar\lambda}$ $(\varepsilon\,\mathrm{Im}\lambda\geq 0)$ и $\dim N_\lambda\leq\dim N_{\bar\lambda}$ $(\varepsilon\,\mathrm{Im}\lambda\leq 0)$.

Предложение 4.

Если $\dim N_\lambda\geq\dim N_{\bar\lambda}$, то

$\ker\Gamma_k=(I+\Phi_k)N_\lambda$, $\Delta(\Phi_k)=N_{\bar\lambda}$, Φ_k – сжатие, $-1\notin\sigma_p(\Phi_k)$,

$\ker\widetilde{\Gamma}_k=(I+\widetilde{\Phi}_k)D(\widetilde{\Phi}_k)$, $\Delta(\widetilde{\Phi}_k)=N_{\bar\lambda}$, $\widetilde{\Phi}_k$ – изометрический оператор, $-1\notin\sigma_p(\widetilde{\Phi}_k)$,

$N_\lambda=D(\widetilde{\Phi}_k)\oplus\ker\Phi_k$,

если $\dim N_\lambda\leq\dim N_{\bar\lambda}$, то

$\ker\Gamma_k=(I+\Phi_k)N_{\bar\lambda}$, $\Delta(\Phi_k)=N_\lambda$, Φ_k – сжатие, $-1\notin\sigma_p(\Phi_k)$,

$\ker\widetilde{\Gamma}_k=(I+\widetilde{\Phi}_k)D(\widetilde{\Phi}_k)$, $\Delta(\widetilde{\Phi}_k)=N_\lambda$, $\widetilde{\Phi}_k$ – изометрический оператор, $-1\notin\sigma_p(\widetilde{\Phi}_k)$,

$N_{\bar\lambda}=D(\widetilde{\Phi}_k)\oplus\ker\Phi_k$, $(k=\overline{1,2})$.

Рассмотрим случай $\dim N_\lambda\leq\dim N_{\bar\lambda}$. Пусть $x\in\ker\Gamma_2$, $x=x_\lambda+x_{\bar\lambda}$. Имеет место равенство

$\left(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x\right)_X - \left(\Gamma_2 x, \Gamma_1 x\right)_X - 2\varepsilon i\left(\Gamma x, \Gamma x\right)_{X'} = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\left[\left(x_{\bar{\lambda}}, x_{\bar{\lambda}}\right) - \left(x_\lambda, x_\lambda\right)\right]$, или $-2\varepsilon i\|\Gamma x\|^2_{X'} = 2(\operatorname{Im}\lambda) i\left[\left\|x_{\bar{\lambda}}\right\|^2 - \left\|x_\lambda\right\|^2\right]$ (5). Т.к. ε и $\operatorname{Im}\lambda$ разных знаков, то из (5) следует $\left\|x_{\bar{\lambda}}\right\| \geq \left\|x_\lambda\right\|$ (6). Компонента x_λ однозначно определяется компонентой $x_{\bar{\lambda}}$. Действительно, если $x' = x'_\lambda + x_{\bar{\lambda}} \in \ker\Gamma_2$, то

$(x - x') = 0 + \left(x_\lambda - x'_\lambda\right) \in \ker\Gamma_2$, из (6) следует $\|0\| \geq \left\|x_\lambda - x'_\lambda\right\|$, откуда $x_\lambda = x'_\lambda$.

Т.о. на множестве $x_{\bar{\lambda}}$ таких, что $x_\lambda + x_{\bar{\lambda}} \in \ker\Gamma_2$ можно определить оператор Φ_2:

$\Phi_2 x_{\bar{\lambda}} = x_\lambda$. Причем $\left\|\Phi_2 x_{\bar{\lambda}}\right\| \leq \left\|x_{\bar{\lambda}}\right\|$ и $-1 \notin \sigma_p(\Phi_2)$.

Далее, допустим $\overline{D(\Phi_2)} \neq N_{\bar{\lambda}}$. Тогда $\exists y_{\bar{\lambda}} \neq 0 : \left(y_{\bar{\lambda}}, x_{\bar{\lambda}}\right) = 0 \quad \forall x_{\bar{\lambda}} \in D(\Phi_2)$. Пусть $\tilde{\Gamma}_2 y_{\bar{\lambda}} = \langle\varphi, \varepsilon i\alpha\rangle$. Для пары $\{\langle 0, (-\alpha)\rangle, \langle\varphi, \varepsilon i\alpha\rangle\}$ $\exists x \in N_\lambda \dotplus N_{\bar{\lambda}}$: $\tilde{\Gamma}_1 x = \langle\varphi, \varepsilon i\alpha\rangle$, $\tilde{\Gamma}_2 x = \langle 0, (-\alpha)\rangle$ (т.е. $x \in \ker\Gamma_2$ и $x = x_{\bar{\lambda}} + \Phi_2 x_{\bar{\lambda}}$). В этом случае из равенства :

$\left(\tilde{\Gamma}_1 x, \tilde{\Gamma}_2 y_{\bar{\lambda}}\right) - \left(\tilde{\Gamma}_2 x, \tilde{\Gamma}_1 y_{\bar{\lambda}}\right) = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\left(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}\right)$ получаем : $\|\varphi\|^2 + 2\varepsilon^2\|\alpha\|^2 = 0$ и $\varphi = \alpha = 0$. Тогда

$y_{\bar{\lambda}} \in \ker\Gamma_2$ и $y_{\bar{\lambda}} = z_{\bar{\lambda}} + \Phi_2 z_{\bar{\lambda}}$, но в этом случае $\Phi_2 z_{\bar{\lambda}} = 0$ и $z_{\bar{\lambda}} = 0$. Таким образом, $y_{\bar{\lambda}} = 0$, что противоречит предположению $y_{\bar{\lambda}} \neq 0$. Следовательно, $\overline{D(\Phi_2)} = N_{\bar{\lambda}}$. Докажем, что $\overline{D(\Phi_2)} = D(\Phi_2)$. Пусть $x_{\bar{\lambda}} \in \overline{D(\Phi_2)} \Rightarrow$ $x_{\bar{\lambda}} = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}_{\bar{\lambda}}$, $x^{(n)}_{\bar{\lambda}} \in D(\Phi_2)$. Рассмотрим вектор

$x = \lim_{n\to\infty}\left(x^{(n)}_{\bar{\lambda}} + \Phi_2 x^{(n)}_{\bar{\lambda}}\right) = x_{\bar{\lambda}} + x_\lambda$, и докажем, что $x \in \ker\Gamma_2$. Действительно, $\forall y \in N_\lambda \dotplus N_{\bar{\lambda}}$, $y = y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}$ $\left(\tilde{\Gamma}_1 x, \tilde{\Gamma}_2 y\right) - \left(\tilde{\Gamma}_2 x, \tilde{\Gamma}_1 y\right) = \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)\times$

$\times\left[\left(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}\right) - \left(x_\lambda, y_\lambda\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(x^{(n)}_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}\right) - \left(\Phi_2 x^{(n)}_{\bar{\lambda}}, y_\lambda\right)\right] =$

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\tilde{\Gamma}_1\left(x^{(n)}_{\bar{\lambda}} + \Phi_2 x^{(n)}_{\bar{\lambda}}\right), \tilde{\Gamma}_2 y\right) - \left(\tilde{\Gamma}_2\left(x^{(n)}_{\bar{\lambda}} + \Phi_2 x^{(n)}_{\bar{\lambda}}\right), \tilde{\Gamma}_1 y\right)\right]$ (7). Выберем y так, чтобы $\tilde{\Gamma}_1 y = \langle\Gamma_2 x, 0\rangle$, $\tilde{\Gamma}_2 y = \langle 0, 0\rangle$. Тогда из (7) следует $\|\Gamma_2 x\|^2 = 0$ и $\Gamma_2 x = 0$. Тогда $x_{\bar{\lambda}} \in D(\Phi_2)$ и $\overline{D(\Phi_2)} = D(\Phi_2) = N_{\bar{\lambda}}$.

Аналогично доказывается, что $\Delta(\Phi_2) = N_\lambda$.

Предположим $x \in \ker\widetilde{\Gamma}_2$, тогда в выражении (5) левая часть равна 0, поэтому $\|x_{\bar{\lambda}}\| = \|x_\lambda\|$ и, следовательно, $\widetilde{\Phi}_2$ – изометрический оператор.

Аналогично приведенному выше, доказывается, что $\overline{D(\widetilde{\Phi}_2)} = D(\widetilde{\Phi}_2)$,

$\Delta(\widetilde{\Phi}_2) = N_\lambda$,

$-1 \notin \sigma_p(\widetilde{\Phi}_2)$.

Теперь пусть $y_{\bar{\lambda}} \perp D(\widetilde{\Phi}_2)$, $\widetilde{\Gamma}_1 y_{\bar{\lambda}} = \langle\psi,\alpha\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar{\lambda}} = \langle\varphi,\varepsilon i\alpha\rangle$. Для пары $\{\langle\varphi,0\rangle,\langle 0,0\rangle\}$

$\exists x : \widetilde{\Gamma}_1 x = \langle\varphi,0\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 x = \langle 0,0\rangle$, т.е. $x \in \ker\widetilde{\Gamma}_2$ и $x = x_{\bar{\lambda}} + \widetilde{\Phi}_2 x_{\bar{\lambda}}$. Из равенства $(\widetilde{\Gamma}_1 x, \widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar{\lambda}}) - (\widetilde{\Gamma}_2 x, \widetilde{\Gamma}_1 y_{\bar{\lambda}}) = (\lambda - \bar{\lambda})(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}})$ следует $\|\varphi\|^2 = 0$ и $\varphi = 0$, а значит $y_{\bar{\lambda}} \in \ker\Phi_2$.

Если $y_{\bar{\lambda}} \in \ker\Phi_2$, $\widetilde{\Gamma}_1 y_{\bar{\lambda}} = \langle\psi,\alpha\rangle$, $\widetilde{\Gamma}_2 y_{\bar{\lambda}} = \langle 0,\varepsilon i\alpha\rangle$, то $\forall x \in \ker\widetilde{\Gamma}_2$, $x = x_{\bar{\lambda}} + \widetilde{\Phi}_2 x_{\bar{\lambda}}$, из того же равенства следует $(x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}) = 0$. Т.о. $y_{\bar{\lambda}} \perp D(\widetilde{\Phi}_2)$. Т.к. $\overline{D(\widetilde{\Phi}_2)} = D(\widetilde{\Phi}_2)$, то $N_{\bar{\lambda}} = D(\widetilde{\Phi}_2) \oplus \ker\Phi_2$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для Φ_1, $\widetilde{\Phi}_1$, $\ker\Gamma_1$, $\ker\widetilde{\Gamma}_1$, и для случая

$\dim N_\lambda \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$. □

<u>Предложение 5</u>

Если $\dim N_\lambda \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$, то $N_\lambda \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker\widetilde{\Gamma}_k \dotplus N_\lambda = \ker\Gamma_k \dotplus N_{\bar{\lambda}}$,

если $\dim N_\lambda \leq \dim N_{\bar{\lambda}}$, то

$N_\lambda \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker\widetilde{\Gamma}_k \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker\Gamma_k \dotplus N_\lambda$, $(k = \overline{1,2})$.

Пусть $\dim N_\lambda \geq \dim N_{\bar{\lambda}}$, $x \in \ker\widetilde{\Gamma}_1 \bigcap N_\lambda$. Тогда $x = x_\lambda + \widetilde{\Phi}_1 x_\lambda$, причем $\widetilde{\Phi}_1 x_\lambda = 0$. Следовательно, $x_\lambda = 0$ и $x = 0$. Т.о. $\ker\widetilde{\Gamma}_1$ и N_λ – линейно независимы. Пусть теперь $x = x_\lambda + x_{\bar{\lambda}} \in N_\lambda \dotplus N_{\bar{\lambda}}$. Тогда

$x = x_\lambda - \widetilde{\Phi}_1^{-1} x_{\bar{\lambda}} + \widetilde{\Phi}_1^{-1} x_{\bar{\lambda}} + x_{\bar{\lambda}} = (x_\lambda - z_\lambda) + (z_\lambda + \widetilde{\Phi}_1 z_\lambda)$, где $x_\lambda - z_\lambda \in N_\lambda$, а $z_\lambda + \widetilde{\Phi}_1 z_\lambda \in \ker\widetilde{\Gamma}_1$. Т.о. $N_\lambda \dotplus N_{\bar{\lambda}} = \ker\widetilde{\Gamma}_1 \dotplus N_\lambda$.

Аналогично доказываются остальные случаи.

Предложение 6

Если $\dim N_\lambda \ge \dim N_{\bar\lambda}$, то

$\dim\widetilde{X} = \dim N_\lambda$, $\dim X = \dim N_{\bar\lambda}$, $\dim X' = \dim N_\lambda - \dim N_{\bar\lambda}$,

если $\dim N_\lambda \le \dim N_{\bar\lambda}$, то $\dim\widetilde{X} = \dim N_{\bar\lambda}$,

$\dim X = \dim N_\lambda$, $\dim X' = \dim N_\lambda - \dim N_{\bar\lambda}$.

Пусть $\dim N_\lambda \ge \dim N_{\bar\lambda}$. Система векторов $\left\{x_\lambda^{(k)}\right\}_1^r$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система векторов

$\left\{x_\lambda^{(k)} + \Phi_1 x_\lambda^{(k)}\right\} \subset \ker\Gamma_1$. Поэтому

$\dim N_\lambda = \dim\ker\Gamma_1$, что согласно предложению 3 равно $\dim\widetilde{X}$.

Т.к. $\widetilde{\Phi}_1$ – изометрический, то любой $x_{\bar\lambda}$ имеет свой единственный прообраз x_λ :

$\widetilde{\Phi}_1 x_\lambda = x_{\bar\lambda}$. Поэтому система векторов $\left\{x_{\bar\lambda}^{(k)}\right\}_1^s$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система векторов

$\left\{x_\lambda^{(k)} + \widetilde{\Phi}_1 x_\lambda^{(k)}\right\} \subset \ker\widetilde{\Gamma}_1$, следовательно,

$\dim N_{\bar\lambda} = \dim\ker\widetilde{\Gamma}_1$, что согласно предложению 2 равно $\dim X$.

Аналогичны рассуждения в случае $\dim N_\lambda \le \dim N_{\bar\lambda}$.

Полученные свойства ПГЗ позволяют ввести понятие функции Вейля эрмитова оператора, исследовать ее свойства, а также описать некоторые свойства регулярных расширений в терминах абстрактных граничных значений.

В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенные выше теоретические понятия.

Рассмотрим в пространстве $H = L_2[0,+\infty)$ симметрический оператор $(Ax)(t) = ix'''(t)$ с областью определения $D(A) = \{x \in H : x(0) = x'(0) = x''(0) = 0\}$.

$N_\lambda = \ker(A^* - \bar\lambda I)$. Пусть $\operatorname{Im}\lambda > 0$, тогда $x_\lambda(t) = c_0 e^{\mu_0 t}$, $x_{\bar\lambda}(t) = c_1 e^{-\bar\mu_1 t} + c_2 e^{-\bar\mu_2 t}$, где μ_0, μ_1, μ_2 – корни уравнения $\mu^3 = -i\bar\lambda$. Т.о. $n_+ = 1$, $n_- = 2$, $\varepsilon = -1$. В этом случае полагаем $X = X' = C$ и выбираем $\Gamma_1 x = x''(0)$,

$\Gamma_2 x = ix(0)$, $\Gamma x = \frac{1}{\sqrt{2}} x'(0)$. Тогда $\widetilde{\Gamma}_1 x = \left\langle x''(0), \frac{1}{\sqrt{2}} x'(0) \right\rangle$,
$\widetilde{\Gamma}_2 x = \left\langle ix(0), -\frac{i}{\sqrt{2}} x'(0) \right\rangle$.

Литература

1. В. А. Деркач, М. М. Маламуд. О характеристических функциях расширений эрмитова оператора. (1984), Макеевка, 45 с.
2. А. В. Кужель, И. И. Карпенко. Пространства граничных значений эрмитовых операторов. (1989), Симф.: СГУ, 8 с.
3. С. А. Кужель. О правильных расширениях эрмитовых операторов.– Функциональный анализ. Линейные пространства: Межвузовский сборник научных трудов. (1990), Ульяновск, с.91-100.
4. О. Г. Сторож. Методы теории расширений и дифференциально-граничные операторы.– Дисс-я ... докт. физ.-мат. наук. (1995), Львов, 277 с.