УДК 517.36

К ВОПРОСУ О ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В КОНУСЕ

Персидский С. К.[1], Дрёмов С. Ю.[2]

В статье критерий С. К. Персидского знакоопределенности квадратичных форм в конусе применен для обобщения известной теоремы Л. Груйича об экспоненциальной устойчивости сложных систем; для задач большой размерности дано описание компьютерной реализации указанного критерия.

Ключевые слова: квадратичная форма, знакоопределенность, устойчивость, конус.

Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x) = x^T Ax \tag{1}$$

где $x \in R^n$, A – вещественная постоянная симметричная матрица размерности $n \times n$ с положительными диагональными элементами a_{ss} $(s = \overline{1,n})$.

Согласно работе [1] введем квадратичную форму той же размерности $V_1(x) = x^T A_1 x$, которую назовем «оценочной», если в неотрицательном конусе $K_+^n : x \geq 0$ пространства R^n выполняется неравенство

$$V(x) = x^T Ax \geq V_1(x) = x^T A_1 x \geq \alpha \|x\|^2, \text{ где } \alpha > 0 \tag{2}$$

Согласно [1] для положительной знакоопределенности формы $V(x)$ в конусе K_+^n необходимо и достаточно выполнение в K_+^n неравенства (2).

Для построения оценочной матрицы A_1 умножим все положительные недиагональные элементы матрицы A на параметр $\lambda \leq 1$. Если при некотором $\lambda = \lambda_0 \leq 1$ для $A(\lambda_0)$ будет выполнен критерий положительной знакоопределенности Сильвестра, то, очевидно, что $A_1 = A(\lambda_0)$ будет «оценочной» матрицей для матрицы A. Практическая реализация этого критерия с помощью ЭВМ приведена в заключительной части работы.

Заметим, что такой подход позволяет не только установить факт знакоопределенности квадратичной формы в K_+^n, но и с использованием «оценочной» квадратичной формы можно получить некоторые неравенства, аналогичные оценкам для квадратичных форм в пространстве R^n.

[1] Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, E-mail: persidskiy@ccssu.crimea.ua.
[2] Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, E-mail: s_dremov@yahoo.com.

Используем приведенные выше критерии знакоопределенности квадратичных форм в конусе для обобщения теоремы Л. Груйича [2] об экспоненциальной устойчивости сложных систем.

Рассмотрим сложную динамическую систему

$$x' = f(t,x),\ \ f \in R^n,\ \ f(t,0) = 0 \tag{3}$$

состоящую из s взаимосвязанных подсистем, задаваемых векторными уравнениями [2]:

$$x_i' = g_i(t,x_i) + h_i(t,x),\ \ g_i \in R^{n_i},\ \ h_i \in R^{n_i}\ \ (i = \overline{1,s}). \tag{4}$$

Изолированные подсистемы имеют вид:

$$x_i' = g_i(t,x_i),\ \ g_i(t,0) = 0\ \ x_i \in R^{n_i},\ \ x = x(x_1,\ldots,x_s), \tag{5}$$

где x_i – подвекторы вектора x.

Будем предполагать, что в области $R: t \ge 0, \|x\| < \infty$ правые части системы (3) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения.

Предположим, что нулевые решения изолированных подсистем (5) могут быть либо экспоненциально устойчивыми, либо экспоненциально неустойчивыми, и пусть для каждой i-й подсистемы (5) существует функция $v_i(t,x_i)$, удовлетворяющая неравенствам:

$$c_{i1}\|x_i\|^2 \le v_i(t,x_i) \le c_{i2}\|x_i\|^2\ \ (i = \overline{1,s}) \tag{6}$$

$$\mu_i c_{i3}\|x_i\|^2 \le v_i'(t,x_i) \le \mu_i c_{i4}\|x_i\|^2\ \ (i = \overline{1,s}) \tag{7}$$

где $c_{ir} > 0$ $(r = \overline{1,4})$ – вещественные постоянные, $\mu_i = -1$, если нулевое решение i-й подсистемы (5) экспоненциально устойчиво и $\mu_i = 1$ в случае экспоненциальной неустойчивости.

Следуя работе [2], будем говорить, что вектор $h(t,x)$ принадлежит классу H, если для любых t, x из области R выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (grad\ v_i(t,x_i), h_i(t,x)) \le \sum_{i,r=1}^{s} a_{ir}\|x_i\|\|x_r\|, \tag{8}$$

где $a_{ir} = a_{ri}$ – некоторые вещественные числа.

Положим $V(t,x) = \sum_{i=1}^{s} v_i(t,x_i)$, тогда, согласно (7) – (8), полная производная V в силу системы (3) будет удовлетворять неравенству

$$V'_{(3)} \le \sum_{i,r=1}^{s} d_{ir}\|x_i\|\|x_r\|\ \ (d_{ir} = d_{ri}) \tag{9}$$

где $d_{ij} = \mu_i c_{i4}\delta_{ij} + a_{ij}$ $(i,j = \overline{1,s})$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Имеет место следующая **теорема**:

Если квадратичная форма

$$-\sum_{i,r=1}^{s} d_{ir} y_i y_r \tag{10}$$

является функцией положительной знакоопределенной в неотрицательном конусе $K_+^s : y_i \geq 0 \ (i = \overline{1,s})$, то есть в указанном конусе выполняется неравенство

$$-\sum_{i,r=1}^{s} d_{ir} \|x_i\| \|x_r\| \geq \alpha \|x\|^2, \text{ где } \alpha > 0 \tag{11}$$

то нулевое решение $x \equiv 0$ исходной системы (3) экспоненциально устойчиво в целом. Действительно, на решениях системы (3) полная производная $V'_{(3)} \leq -\alpha \|x\|^2$, что следует из (11). Кроме того, полагая $\min c_{i1} = C_1$, $\max c_{i2} = C_2$, будем иметь $C_1 \|x\|^2 \leq V(t,x) \leq C_2 \|x\|^2$, откуда следует, что

$$V'(t,x(t)) \leq -\alpha \frac{V(t,x(t))}{C_1}, \text{ или } V(t,x(t)) \leq V(t_0,x(t_0)) e^{-\frac{\alpha}{C_1}(t-t_0)},$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что указанная теорема обобщает теоремы Л. Груйича [2] и С. А. Житникова [3].

Действительно, в теореме Л. Груйича требуется, чтобы квадратичная форма (10) удовлетворяла критерию положительной знакоопределенности Сильвестра, а в теореме С. А. Житникова не делается заключение об экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (3).

В качестве примера рассмотрим сложную систему, приведенную в [3].

Пусть система (3) состоит из трех взаимосвязанных подсистем вида (4), для которых

$$h_1(x) = 0{,}5 \begin{pmatrix} 2x_{31} sign(x_{11}x_{31}) - 2x_{22} sign(x_{11}x_{22}) + x_{11}\cos(x_{21} + x_{32}) \\ -2x_{22} sign(x_{12}x_{22}) - 2x_{23} sign(x_{12}x_{23}) + x_{12}\cos(x_{31} + x_{11}) \\ -2x_{23} sign(x_{13}x_{23}) - 2x_{21} sign(x_{13}x_{21}) + x_{13}\cos(x_{33} + x_{12}) \end{pmatrix},$$

$$h_2(x) = 0{,}5 \begin{pmatrix} -2x_{11} sign(x_{11}x_{21}) - 2x_{12} sign(x_{12}x_{21}) + 5x_{21}\sin(x_{31}x_{23}) \\ 10x_{32} sign(x_{22}x_{32}) - 2x_{13} sign(x_{13}x_{22}) + 5x_{22}\sin(x_{11}x_{33}) \\ 10x_{33} sign(x_{23}x_{33}) - 2x_{11} sign(x_{11}x_{23}) + 5x_{23}\sin(x_{12}x_{32}) \end{pmatrix},$$

$$h_3(t,x) = 0{,}5 \begin{pmatrix} 10x_{21} sign(x_{31}x_{21}) - 27x_{31}(2 + \cos(tx_{13})) \\ 2x_{12} sign(x_{32}x_{12}) - 9x_{32}(4 + \sin(tx_{21})) \\ 2x_{13} sign(x_{33}x_{13}) - 3x_{33}(10 + \sin(tx_{23})) \end{pmatrix},$$

$g_1(x_1) = -x_1$, $g_2(x_2) = -3x_2$, $g_3(x_3) = 0{,}5x_3$.

Для каждой изолированной подсистемы выберем соответствующую функцию Ляпунова $v_i(x_i)=\|x_i\|^2$, $(i=\overline{1,3})$. Тогда $V=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2$. В силу полной системы $-V'$ будет допускать следующую оценку [3]

$$-V'\geq(\|x_1\|,\|x_2\|,\|x_3\|)\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -5\\ -1 & -5 & 26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|x_1\|\\ \|x_2\|\\ \|x_3\|\end{pmatrix}$$

Умножая положительные недиагональные коэффициенты этой матрицы на $\lambda\leq 1$, мы видим, что указанная матрица будет положительной знакоопределенной в R^3 при $\lambda\in(0,\frac{5}{13})$. Полагая $\lambda=0{,}2$, для V' получаем следующую оценку $V'(t,x(t))\leq -0{,}03703\|x\|^2$, откуда следует неравенство $V(t,x(t))\leq V(t_0,x(t_0))\times$ $\times e^{-0{,}03703(t-t_0)}$, что доказывает экспоненциальную устойчивость рассматриваемой сложной системы.

Заметим, что в [3] при рассмотрении этой задачи С. А. Житников сделал заключение об асимптотической устойчивости в целом, но не об экспоненциальной устойчивости.

Рассмотрим далее некоторые вопросы компьютерной реализации рассмотренного в статье критерия знакоопределенности квадратичных форм в неотрицательном конусе $K_+^n\subset R^n$.

Для квадратичной формы $V(x)=x^TAx$, где $x\in R^n$, A – вещественная симметричная матрица с положительными диагональными элементами, строим матрицу $A(\lambda)$, умножая все недиагональные положительные элементы на параметр $\lambda\leq 1$. Квадратичная форма $V(x)$ будет положительной знакоопределенной в K_+^n, когда хотя бы для одной из матриц $A(1)=A$, $A(0)$, $A(\lambda)$ выполняется критерий Сильвестра.

В первых двух случаях проверка критерия Сильвестра не вызывает затруднений, а в третьем случае для $A(\lambda)$ строим главные диагональные миноры $\Delta_k(\lambda)=P_k(\lambda)$, где $P_k(\lambda)$ – многочлены от λ степени не выше k. Среди полученных $P_k(\lambda)$ находим первый многочлен второй степени (обозначим его как $P_j(\lambda)$, λ_1, λ_2 – его корни). Так как ветви параболы $P_j(\lambda)$ направлены вниз (в силу симметричности матрицы $A(\lambda)$), то $P_j(\lambda)>0$ на отрезке (λ_1,λ_2). Пусть $\lambda_1<\lambda_2$ и $\lambda_1<1$ (в противном случае критерий не выполняется), обозначим как $\overline{\lambda}=\min\{1,\lambda_2\}$. Тогда для $P_{j+s}(\lambda)$, $s\geq 1$ на множестве $\sigma_j=(\lambda_1,\overline{\lambda})$ ищем области σ_{j+s}, на которых $P_{j+s}(\lambda)>0$. Обозначим через σ пересечение полученных множеств. Тогда, если $\sigma \neq \varnothing$, $\forall \lambda \in \sigma$ $A(\lambda)$ – положительная знакоопределенная и $V(x)$ – положительная знакоопределенная в K_{+}^{n}.

Программа, реализующая вышеописанные алгоритмы, имеет ряд особенностей. В частности, структуры данных, описывающие матрицы, многочлены и множества σ_{j+s}, являются динамическими (конкретно – линейные списки), что позволяет работать с задачами практически любой размерности. Так, матрица представляет собой линейный список, состоящий из элементов вида $a_{ij}\lambda^{k}$ $(i, j = \overline{1,n})$, где a_{ij} – соответствующий элемент матрицы A (если параметр λ при нем отсутствует, то $k = 0$); многочлен – также линейный список из элементов вида $c\lambda^{m}B$, где c – вещественный коэффициент, B – матрица. За счет такой структуры данных реализована нерекурсивная процедура вычисления определителей произвольного порядка, которые раскрываются по элементам первого столбца до тех пор, пока все матрицы в многочлене не будут порядка 3, после чего все полученные матрицы раскрываются обычным образом, приводятся подобные слагаемые, элементы многочлена упорядочивается по убыванию показателей степени параметра λ. Приближенные корни многочлена на отрезке ищутся методом дихотомии – отрезок разбивается на 10^{3} равных частей, на концах которых проверяются значения многочленов, при необходимости разбиение загущается. Для нахождения множества σ реализована процедура нахождения пересечения множеств, состоящих из нескольких отрезков.

Список литературы

1. Персидский С. К. Об одном критерии знакоопределенности квадратичных и квазиквадратичных форм в конусе // Динамические системы. – 1999. – №15. – С. 14–19. – ISSN 0203-3755.
2. Grujic L. T. Stability analysis of large-scale systems with stable and unstable subsystems. – Int. J. Contr. – 1974. – V. 20. – №3. – P. 453–463.
3. Житников С. А. К вопросу об устойчивости сложных систем // Математика. – 1981. – №7 (230). – С. 34–39.

Анотація

Персідський С. К., Дрьомов С. Ю. До питання про знаковизначеність квадратичних форм у конусі.

У статті критерій С. К. Персідського знаковизначеністі квадратичних форм у конусі застосований для узагальнення відомої теореми Л. Груйіча про експоненту стійкість складних систем; для задач великої розмірності надан опис комп'ютерної реалізації зазначеного критерію.

Summary

Persidskiy, S. K., Dryomov, S. Y. Concerning property of having fixed sign quadratic forms in a cone

In this article a criterion of S. K. Persidskiy property of having fixed sign quadratic forms in a cone applied for generalization of a well-known theoreme of L. Grujic about exponential stability of complex systems. A description of computer realization of above criterion is given for a tasks of large demension.