КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ, ЧАСТИЧНО ПОКРЫТОМ ЛЬДОМ

Солдатов М. А., аспирант

0. Введение.

В данной работе рассмотрена задача о малых движениях и свободных колебаниях идеальной жидкости в бассейне, частично покрытом льдом, крошеным льдом, а также имеющем участки поверхности жидкости без льда.

Используя подход, описанный в [1], исходная начально-краевая задача была сведена к задаче Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + Bu = 0, \quad u(0) = u^0, \frac{du}{dt}(0) = u^1 \qquad (0)$$

в некотором гильбертовом (вещественном) пространстве H. Здесь A и B – операторы кинетической и потенциальной энергии соответственно.

Нами были изучены следующие уровни задачи:

1. Поверхность жидкости без льда (см. [1, §3.3]).
2. Упругий лед на поверхности (см. [1, §4.2]).
3. Крошеный лед на поверхности жидкости.
4. Поверхность из льда и крошеного льда.
5. Поверхность из льда и участков чистой воды.
6. Бассейн покрыт крошеным льдом и есть участки чистой воды.
7. Общий случай: на поверхности бассейна есть участки упругого льда, крошеного льда и чистой воды.

Для всех этих случаев мы исследовали начально-краевую задачу и доказали теорему о разрешимости. Также были исследованы соответствующие спектральные задачи.

Здесь мы рассмотрим общий случай 7.

1. Постановка задачи.

Пусть Ω – произвольная область из R^3 с границей $\partial\Omega = S \cup \Gamma$, где S – жесткая боковая стенка, а Γ – свободная поверхность.

Пусть область Ω заполнена идеальной жидкостью плотности ρ. Свободная поверхность Γ состоит из трех типов поверхностей:

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \qquad \overline{\Gamma} = \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2},$$

$$\Gamma_0 = \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_{0j}, \quad \Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_{1k}, \quad \Gamma_2 = \bigcup_{l=1}^{q} \Gamma_{2l},$$

где Γ_{0j} – участки "чистой воды", Γ_{1k} – участки "льда", Γ_{2l} – участки "крошеного льда".

Пусть $\rho_1 (< \rho)$ – поверхностная плотность льда, $\rho_2 (< \rho$ – поверхностная плотность крошеного льда, $\{d_{1k}\}_{k=1}^{m}$ – коэффициенты жесткости льдин.

Исследуются малые колебания жидкости в области Ω, находящейся в потенциальном поле силы тяжести. Силы поверхностного натяжения в данной задаче не учитываются, поэтому в состоянии покоя свободная поверхность Γ плоская и горизонтальная, т.е. перпендикулярна направлению ускорения гравитационного поля $\vec{g}$. Введем в рассмотрение функции: $u(t,x)$ – поле малых скоростей жидкости, $p(t,x)$ - динамическое давление, $w(t,x_1,x_2)$ – поле отклонений свободной поверхности от равновесного состояния. Тогда движение жидкости в бассейне описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\dfrac{1}{\rho}\nabla p=\vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u}=0 \qquad (\text{в } \Omega), \\ u_n=\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \qquad (\text{на S}), \\ p=\rho g w, \quad u_n=u_3=\dfrac{\partial w}{\partial t} \qquad (\text{на } \Gamma_0), \\ p=\rho_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+B_1 w, \quad u_n=u_3=\dfrac{\partial w}{\partial t} \qquad (\text{на } \Gamma_1), \\ p=\rho g w+\rho_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad u_n=u_3=\dfrac{\partial w}{\partial t} \qquad (\text{на } \Gamma_2), \\ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^0(x), \quad w(0,x_1,x_2)=w^0(x_1,x_2), \\ \int\limits_{\Gamma} w(x_1,x_2)\,d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_0} w(x_1,x_2)\,d\Gamma_0+\int\limits_{\Gamma_1} w(x_1,x_2)\,d\Gamma_1+\int\limits_{\Gamma_2} w(x_1,x_2)\,d\Gamma_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь B_1 – оператор, действующий в пространстве $L_2(\Gamma_1)$ по закону:

$$B_1 w=\left(d_1\Delta_2^2+\rho g\right)w, \tag{2}$$

а область определения оператора B_1 – функции w из $L_2(\Gamma_1)$, которые имеют четвертую обобщенную производную, и для них выполнены граничные условия жесткого закрепления льда по границе $\gamma_1=\overline{\Gamma_1}\cap\overline{S}$ и условие равенства нулю поперечной силы и момента на границе $\partial\Gamma_1\setminus\gamma_1$ (см. [3, §23]):

$$D(B_1)=\{w\in H^4(\Gamma_1)\ \mid\ w=\frac{\partial w}{\partial\nu}=0\ (\text{на } \gamma_1),\ Mw=\sigma\Delta w+(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial\nu^2}=0,$$

$$Nw=-\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta w)+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right]=0\ (\text{на } \partial\Gamma_1\setminus\gamma_1)\}.$$

Последнее выражение в (1) является следствием сохранения объема жидкости в области Ω. Интегралы отдельно по Γ_0, Γ_1 и Γ_2 не обязаны быть равны нулю.

2. Операторное уравнение задачи.

Задача (1) решалась методом проектирования уравнений задачи на подпространства ортогонального разложения гильбертова пространства. Неизвестная функция w как элемент гильбертова пространства $H = L_2(\Gamma) - \{1\}_\Gamma$ разыскивалась в виде тройки функций на соответствующих частях поверхности:

$$w = (w_0, w_1, w_2), \quad w_i = w|_{\Gamma_i}.$$

Пространство H представляется в виде ортогональной суммы:

$$H = H_0 \oplus H_2 \oplus \hat{H}_1,$$

$$H_0 = \{(w_0, w_1, w_2) \mid w_0 \in L_2(\Gamma_0) - \{1\}_{\Gamma_0}, w_1 \equiv 0, w_2 \equiv 0\},$$

$$H_2 = \{(w_0, w_1, w_2) \mid w_2 \in L_2(\Gamma_2) - \{1\}_{\Gamma_2}, w_1 \equiv 0, w_0 \equiv 0\},$$

$$\hat{H}_1 = H - H_0 - H_1.$$

После проектирования уравнений (1) на подпространства H исходная задача была сведена к эквивалентной задаче Коши для $v \in H$ (свободные колебания):

$$(A + \rho C)\frac{d^2 v}{dt^2} + Bv = 0, \quad v(0) = v^0, \frac{dv}{dt} = v^1. \tag{3}$$

Были доказаны следующие леммы о свойствах операторов.

Лемма 1. $0 \le A \le \max(\rho_1, \rho_2)I$.

Лемма 2. C – самосопряженный положительный компактный оператор.

Лемма 3. B – неограниченный самосопряженный положительный оператор, причем B^{-1} – ограниченный и положительный.

3. Эволюционная задача.

Была доказана следующая теорема о разрешимости эволюционной задачи.

Теорема 4. Если $v^0 \in D(B)$ и $v^1 \in D(B^{1/2})$, то существует единственное сильное решение задачи (3) в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Gamma) - \{1\}_\Gamma$.

4. Спектральная задача.

Рассматривая нормальные колебания, т.е. колебания, зависящие от времени по закону $\exp(i\omega t)$ ( ), для задачи

$$Bv = \lambda(A + \rho C)v \tag{4}$$

был получен следующий результат.

Теорема 5. Задача (4) имеет дискретный положительный спектр с предельными точками на бесконечности и $\lambda_0 = \dfrac{\rho g}{\rho_2} > 0$. Точке $\lambda = +\infty$ соответствуют волны, как и в случае с упругим льдом и участками поверхности жидкости без льда; точке $\lambda_0 > 0$ отвечает другой тип волн, обусловленных наличием крошеного льда на поверхности.

5. Другие случаи.

Аналогичным образом были рассмотрены и остальные случаи. Для них были доказаны соответствующие теоремы о разрешимости эволюционной задачи. Также были доказаны следующие теоремы о структуре спектра:

1. Поверхность жидкости без льда (ветвь собственных значений с пределом в $\lambda = +\infty$).

2. Упругий лед на поверхности ($\lambda = +\infty$).

3. Крошеный лед на поверхности жидкости ($\lambda_0 = \text{const} > 0$).

4. Поверхность из льда и крошеного льда ($\lambda = +\infty$, $\lambda_0 = \text{const} > 0$).

5. Поверхность из льда и участков чистой воды ($\lambda = +\infty$).

6. Бассейн покрыт крошеным льдом и есть участки чистой воды ($\lambda = +\infty$, $\lambda_0 = \text{const} > 0$).

7. Общий случай: на поверхности бассейна есть участки упругого льда, крошеного льда и чистой воды ($\lambda = +\infty$, $\lambda_0 = \text{const} > 0$).

Для ветвей собственных значений мы исследовали их асимптотическое поведение.

Литература

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан, Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1989.
2. Ландау Л., Лившиц Е., Механика сплошных сред.– Москва, 1944.
3. Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985.
4. Смирнов В.И., Курс высшей математики. Том V.–- Москва, 1960.