

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И ПСЕВДОТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.В.Орлов, кандидат физико-математических наук, доцент

Введение. Классическая формула конечных приращений для отображения отрезка в вещественное локально выпуклое топологическое пространство ([1]) дает глобальную замкнутую выпуклую оценку

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B \quad (1)$$

при наличии локальной оценки $f'(t) \in g'(t) \cdot B$, $a < t < b$, где f и g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы кроме конечного или счетного "исключительного множества" d , g возрастает, B замкнуто и выпукло в E . В данной работе последовательно рассмотрены три направления обобщений формулы Лагранжа (1):

1) формула Лагранжа в ЛВП без предположения о счетности "исключительного множества" d ; (§1)

2) формула Лагранжа без предположения о локальной выпуклости ТВП E ; (§2)

3) формула Лагранжа для псевдотопологических ЛВП (§3).

В заключительном разделе (§4) рассмотрен ряд приложений: формула Тейлора, формула Лагранжа-Стокса и др.

§1. Обобщенная формула Лагранжа в топологических ЛВП. ([2]-[4])

Всюду далее $m\epsilon s^*$ - внешняя мера Лебега в R , $m\epsilon s$ - соответствующая мера, $(L) \int_A \varphi(t) dt$ - интеграл Лебега в R . Приведем важную лемму, имеющую самостоятельное значение.

Лемма 1.1. Если f - вещественная непрерывная на R функция, $D \subset R$, $m\epsilon s^* D < +\infty$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется дизъюнктивное покрытие интервалами $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ множества D , для которого:

$$\sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| < m\epsilon s^* f(D) + \epsilon.$$

С использованием этого результата и ряда других утверждений может быть получена оценка, переход от которой к общему случаю уже не составляет труда.

Теорема 1.2. Если f — вещественная, непрерывная на $[a, b]$ функция, дифференцируемая на $[a, b] \setminus d$, φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$, причем $f'(t) \leq \varphi'(t)$ для $t \notin d$, то

$$f(b) - f(a) \leq (L) \int_{[a, b] \setminus d} \varphi(t) dt + m\epsilon s^* f(d).$$

Следствие 1.3. Если, в условиях теоремы 1.2, $m\epsilon s^* f(d) = m\epsilon s f(d) = 0$, то

$$f(b) - f(a) \leq (L) \int_{[a, b] \setminus d} \varphi(t) dt. \quad (2)$$

Применение оценки (2) и теоремы Хана-Банаха по известной схеме (сравни. [1]) приводит к общей формулировке.

Теорема 1.4. Пусть E — отделенное локально выпуклое пространство над R , B — его замкнутое выпуклое подмножество; $f: [a, b] \rightarrow E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$; $f(d)$ имеет скалярную меру нуль ([5]); φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$; $f'(t) \in \varphi(t) \cdot B$ при $t \in [a, b] \setminus d$. Тогда

$$f(b) - f(a) \in (L) \int_{[a, b] \setminus d} \varphi(t) dt \cdot B. \quad (3)$$

Отметим, что классическая оценка (1) является весьма частным случаем формулы (3), соответствующим $\varphi(t) = g'(t)$, где $g(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на $[a, b] \setminus d$ функция, $g'(t) \geq 0$ и $m_s d = m_s g(d) = 0$, $f(d)$ — скалярной меры нуль. При этом "исключительное множество" d может быть также несчетным.

Следствие 1.5 ("теорема о среднем"). В условиях теоремы 1.4, относящихся к f ,

$$f(b) - f(a) \in m_s([a, b] \setminus d) \cdot \overline{\text{conv}} f'([a, b] \setminus d). \quad (4)$$

В случае $m_s(d) = 0$ оценка (4) принимает стандартный вид

$$(f(b) - f(a) / b - a) \in \overline{\text{conv}} f'([a, b] \setminus d). \quad (5)$$

(Здесь $\overline{\text{conv}}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества).

Следствие 1.6 ("теорема о среднем для двух функций"). Если, при тех же условиях для f , функция g непрерывна и строго монотонна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b] \setminus d$ и $g'(t) \neq 0$, то

$$f(b) - f(a) \in m_s g([a, b] \setminus d) \cdot \overline{\text{conv}} \frac{f'}{g'}([a, b] \setminus d). \quad (6)$$

В случае $m_s g(d) = 0$ оценка (6) принимает вид "формулы Коши"

$$(f(b) - f(a) / g(b) - g(a)) \in \overline{\text{conv}} \frac{f'}{g'}([a, b] \setminus d). \quad (7)$$

Оценки (6)-(7) существенно используются при выводе обобщенной формулы Тейлора в ЛВП (см. §4).

§2. Отделимая выпуклая оценка в формуле Лагранжа. ([6])

Как уже отмечалось, классическая формула (1) (вместе с ее обобщением (3)) дает замкнутую, а значит, нестрогую оценку Δf даже при наличии строгой оценки производной (скажем, $\|f'(t)\| < C$). Другим недостатком является обязательное условие локальной выпуклости E , сохраняющееся и в псевдотопологическом случае ([1],[7]). Мы введем ниже понятие отделимой выпуклости, позволяющее уточнить оценки (1)-(3) и при этом вывести теорему Лагранжа и основанную на ней технику анализа за рамки класса локально выпуклых пространств.

Пусть E — произвольное вещественное ТВП, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Назовем *отделимой выпуклой оболочкой* $\text{con}\hat{v}A$ множества A в E пересечение всех открытых выпуклых подмножеств E , содержащих A . Отметим некоторые свойства $\text{con}\hat{v}A$.

1. Понятие $\text{con}\hat{v}A$ всегда определено, но реально полезно, если $E_R^* \neq \{0\}$ (иначе $\text{con}\hat{v}A = E$).

2. Если $\text{con}\hat{v}A \neq E$, то $\text{con}\hat{v}A$ есть пересечение всех открытых полупространств, содержащих A .

3. Если A связно, то $\text{con}\hat{v}A$ функционально отделимо:

$$\text{con}\hat{v}A = \left\{ x \in E \mid \forall x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle \in \langle x^*, A \rangle \right\} \quad (8)$$

4. Назовем A *отделимо выпуклым*, если $\text{con}\hat{v}A = A$. В \mathbb{R} все выпуклые множества отделимо выпуклы, в \mathbb{R}^2 уже нет.

5. Любое открытое выпуклое множество в ТВП E отделимо выпукло. Любое замкнутое выпуклое подмножество ЛВП E отделимо выпукло.

6. Если любая прямая в ТВП E дополняема (в частности, если E — ЛВП), то точки в E отделимо выпуклы.

Таким образом, класс отделимо выпуклых множеств достаточно широк и включает в себя, в большинстве случаев, как все открытые, так и все замкнутые выпуклые множества.

С помощью свойства функциональной отделимости (8) оценку (3) теоремы 1.4 нетрудно распространить на случай отделимо выпуклой оценки производной.

Теорема 2.1. Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над \mathbb{R} ; \hat{B} — отделимо выпуклое подмножество E ; $f: [a, b] \rightarrow \hat{E}$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$, $f(d)$ — скалярной меры нуль; φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$, $f'(t) \in \varphi(t) \cdot \hat{B}$ при $t \in [a, b] \setminus d$. Тогда

$$f(b) - f(a) \in (L) \int_{[a, b] \setminus d} \varphi(t) \cdot \hat{B}. \quad (9)$$

Отметим, что рассматривая, как и в §1, частный случай $\varphi(t) = g'(t)$, где $g(t)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b] \setminus d$, $\text{mes } d = \text{mes } g(d) = 0$; $f(d)$ — скалярной меры нуль, мы получаем переход к отделимой выпуклой оценке в классической формуле (1): из локальной оценки $f'(t) \in g'(t) \cdot \hat{B}$, где \hat{B} — отделимо выпуклое подмножество ТВП E , вытекает глобальная оценка

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot \hat{B}. \quad (10)$$

Следствие 2.2 ("теорема о среднем"). В условиях теоремы 2.1, относящихся к f ,

$$f(b) - f(a) \in \text{mes}([a, b] \setminus d) \cdot \text{con} \hat{v} f'([a, b] \setminus d). \quad (11)$$

В случае $\text{mes}(d) = 0$ оценка (11) принимает вид

$$(f(b) - f(a) \setminus b - a) \in \text{con} \hat{v} f'([a, b] \setminus d). \quad (12)$$

§3. Формула Лагранжа в псевдотопологических пространствах. ([8])

Псевдотопологии были введены в связи с невозможностью задать топологию в $L(E, F)$ для ненормируемого E , в которой вычисление $(L, x) \mapsto Lx$ непрерывно ([9]), и нашли широкое применение в небанаховом дифференциальном исчислении ([10],[11]). Однако, теорема о среднем рассматривалась, как правило, при наличии в E локально выпуклой топологии, либо в ассоциированной локально выпуклой топологии. Мы вводим понятие однородной дифференцируемости на множестве (совпадающей с обычной в топологическом случае), что позволяет получить формулу Лагранжа в псевдотопологических ЛВП.

Псевдотопологическое векторное пространство E (ПВП) назовем **локально выпуклым** (ПЛВП), если каждый фильтр $\Phi \downarrow E$ мажорируется фильтром $\Phi^c \downarrow E$ с базисом из выпуклых множеств.

Отображение $f: D \rightarrow E$ ($D \in R$, E — ПВП), дифференцируемое на D , **однородно дифференцируемо на D** , если

$$\left[\sup_{t \in D} \left(\frac{\Delta f}{\Delta t}(t) - f'(t) \right) (V) \right] \downarrow E \quad (V \downarrow R).$$

Заметим, что в ТВП E любое дифференцируемое отображение $f: D \rightarrow E$ однородно дифференцируемо. В псевдотопологическом случае возможна как однородная, так и неоднородная дифференцируемость. Приведем сначала класс примеров однородной дифференцируемости.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в ПВП E назовем **однородно сходящимся**, если

$$\left(\left(\sup_{n \geq 1} |\lambda_n| \right) \rightarrow 0 \right) \Rightarrow \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right) \rightarrow 0 \right).$$

Последовательность $f_n: [a, b] \rightarrow R$ назовем **равностепенно дифференцируемой** в точке $t \in [a, b]$, если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} \left\| \frac{\Delta f_n}{\Delta t}(t) - f'_n(t) \right\| = 0.$$

Теорема 3.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ однородно сходится в ПВП E , а последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $[a, b]$ и равностепенно дифференцируема в каждой точке $t \in [a, b]$, то функция

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot x_n$$

однородно дифференцируема на $[a, b]$.

Приведем теперь пример отображения, однородно дифференцируемого лишь локально.

Назовем ПВП E *счетно-псевдонормированным*, если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$; все E_n — нормированные пространства и $\|x\|_n \leq \|x\|_{n+1}$ при $x \in E_n$. Сходимость в E определяется фильтрами

$$\Phi_n = \left\{ \{B_n(\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0} \right\}, B_n(\varepsilon) = \{x \in E_n \mid \|x\|_n < \varepsilon\}.$$

Конкретным примером счетно-псевдонормированного пространства служит любое пространство $E = X^*$, сопряженное к счетно-нормированному; здесь

$$\|x^*\|_n = \inf \left\{ C \mid \|x^*, x\| \leq C \|x\|_n, x \in X \right\}, n \geq n(x^*).$$

Выберем в счетно-псевдонормированном пространстве E последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \notin E_{k_n}, k_n \rightarrow \infty$, и произвольное счетное разбиение $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots \cup T$ отрезка $[t_0, T)$. Положим при $t_{n-1} \leq t \leq t_n$:

$$f(t) = t^2 - 2t \left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k \Delta x_{k+1} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \Delta x_{k+1} \right); n = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что отображение f однородно дифференцируемо на каждом отрезке $[t_0, t_n]$, но не является однородно дифференцируемым на $[t_0, T)$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 3.2. Пусть E — ПЛВП, отображение $f: [a, b] \rightarrow E$ непрерывно на $[a, b]$ и локально однородно дифференцируемо на (a, b) , причем $f'(t) \in g'(t) \cdot B$, где g непрерывна и возрастает на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) , B замкнуто и выпукло в E . Тогда

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B.$$

Следствие 3.3. Результат теоремы 3.2 остается в силе, если f локально однородно дифференцируемо на $[a, b] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Заметим, что схема доказательства теоремы 3.2 позволяет в некоторых случаях не требовать монотонности g ; эти результаты являются новыми и в топологическом случае.

Следствие 3.4. Результат теоремы 3.2 остается в силе при произвольном знаке $g'(t)$, если B — замкнутое аффинное подпространство E .

Следствие 3.5. Если, в условиях теоремы 3.2, B абсолютно выпукло, а $g'(t)$ (произвольного знака) абсолютно \mathbb{R} -интегрируема, то

$$f(b) - f(a) \in \int_a^b |g'(t)| dt \cdot B.$$

Теперь рассмотрим вопрос о переносе отделимой выпуклой оценки (9)-(10) на псевдотопологический случай. Заметим, что в этом случае приведенные в §2 три варианта определения отделимо выпуклой оболочки уже не равносильны. Для наших целей нужно именно свойство функциональной отделимости (8).

Назовем выпуклое множество \hat{B} в ПЛВП E *отделимо выпуклым*, если

$$(x \in \hat{B}) \Leftrightarrow (\forall x^* \in E_R^* : \langle x^*, x \rangle \in \langle x^*, B \rangle). \quad (13)$$

Теорема 3.6. Пусть E — отделимое ПЛВП над \mathbb{R} ; \hat{B} — отделимо выпуклое подмножество E ; $f: [a, b] \rightarrow E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$ (не обязательно однородно); $f(d)$ — скалярной меры нуль; φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$; $f'(t) \in \varphi(t) \cdot \hat{B}$ при $t \in [a, b] \setminus d$. Тогда выполняется оценка (9).

Отметим, что оценки (11)-(12) также переносятся на этот случай.

§4. Некоторые приложения. ([2]-[4],[12])

1. Формула Тейлора. Рассмотрим сначала случай ЛВП E . Пусть $f: [a, b] \rightarrow E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$; $t \in (a, b) \setminus d$. Для достаточно малых Δt обозначим $\Delta t_d := \text{mes}([t, t + \Delta t] \setminus d)$. Если f n раз дифференцируема в точке t , то введем обобщенный многочлен Тейлора $P_n^d(t, \Delta t)$ и остаточный член обобщенной формулы Тейлора $R_n^d(t, \Delta t)$:

$$P_n^d(t, \Delta t) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta t^k}{k!} f^{(k)}(a); \quad R_n^d(t, \Delta t) = f(t + \Delta t) - P_n^d(t, \Delta t).$$

На базе формул (4)-(7) можно получить следующие оценки остаточного члена обобщенной формулы Тейлора.

Теорема 4.1 (форма Лагранжа). Если $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $[a, b] \setminus d$, множества $f^{(k)}(d)$, $k = \overline{0, n}$, скалярной меры нуль, то

$$R_n^d(t, \Delta t) \in \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\text{conv}} f^{(n+1)}([t, t + \Delta t] \setminus d) \quad (14)$$

Теорема 4.2 (форма Пеано). Если $f \in C^n(t)$, множества $f^{(k)}(d)$, $k = \overline{0, n-1}$, скалярной меры нуль, то

$$R_n^d(t, t + \Delta t) = o(\Delta t^n) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (15)$$

Теорема 4.3 (скалярная интегральная форма). Если $f^{(k)}$, ($k = \overline{0, n}$) скалярно абсолютно непрерывны на $[a, b]$, множества $f^{(k)}(d)$, ($k = \overline{0, n-1}$) — скалярной меры нуль, то для всякого $x^* \in E^*$:

$$\langle x^*, R_n^d(a, b - a) \rangle = \frac{1}{n!} (L) \int_{[a, b] \setminus d} \langle x^*, f^{(n)}(t) \rangle' \cdot (b - t)_d^n dt \quad (16)$$

Оценки (14)-(16) являются новыми и в скалярном случае; они совпадают с классическими оценками при $\mu S(d) = 0$. Отметим также, что при отказе в т.4.2 от непрерывности $f^{(n)}$ в точке t равенство (15) может не выполняться уже при $n = 1$.

Перейдем к случаю псевдотопологического ЛВП E . Опираясь на т.3.2, для однородно дифференцируемых отображений можно получить аналоги оценок (14)-(16).

Теорема 4.4. Если f n раз непрерывно однородно дифференцируемо на $[a, b]$, $f^{(n)}$ однородно дифференцируемо на $[a, b]$, то

$$R_n(t, \Delta t) = f(t, t + \Delta t) - \sum_{k=0}^n \frac{\Delta t^k}{k!} f^{(k)}(a) \in \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\text{conv}} f^{(n+1)}([t, t + \Delta t]).$$

Теорема 4.5. Если f n раз однородно дифференцируемо в точке t , то

$$R_n(t, \Delta t) = o(\Delta t^n) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Теорема 4.6. Если $f^{(k)}$ ($k = \overline{0, n}$) ($f^{(k)}$ — однородные производные) скалярно абсолютно непрерывны на $[a, b]$, то для всякого $x^* \in E^*$:

$$\langle x^*, R_n(a, b - a) \rangle = \frac{1}{n!} (L) \int_a^b \langle x^*, f^{(n)}(t) \rangle' \cdot (b - t)^n dt.$$

Наконец, рассмотрим случай отдельных выпуклых оценок в произвольном ПВП E . Использование оценок (11)-(12) приводит к аналогам теорем 4.1 и 4.3.

Теорема 4.7. Если f $n + 1$ раз дифференцируемо в окрестности $o(t)$ точки t , множества

$$f^{(k)}(d) \quad (k = \overline{0, n}) \text{ — скалярной меры нуль, то}$$

$$R_n^d(t, \Delta t) \in \frac{\Delta t_d^{n+1}}{(n+1)!} \text{conv} \hat{f}^{(n+1)}([t, t + \Delta t] \setminus d).$$

Теорема 4.8. Если $f^{(k)}$ ($k = \overline{0, n}$) скалярно абсолютно непрерывны на $[a, b]$ ($f^{(k)}$ — обычные производные), $f^{(k)}(d)$, ($k = \overline{0, n-1}$) — скалярной меры нуль, то выполняется равенство (16).

Заметим, что вывод асимптотической формы (15) остаточного члена существенно использует замкнутую оценку в теореме о среднем и поэтому не переносится на данную ситуацию.

2. Обобщенные степенные ряды. Отметим некоторые свойства функций $(\Delta t_d)^k$ ($k \in \mathbb{N}$):

1) $(\Delta t_d)^k$ возрастает и удовлетворяет условию Липшица с константой

$$k \cdot (\text{mes}([t, t + \Delta t] \setminus d))^{k-1};$$

2) $\varphi(d)$ имеет меру нуль при $\varphi(\Delta t) = (\Delta t_d)^k$;

3) $\varphi'(\Delta t) = k \cdot \Delta t_d^{k-1}$ в точках разрежения d , $\varphi'(\Delta t) = 0$ в точках t плотности d .

Для произвольного набора коэффициентов $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ из ЛВП E определим обобщенные многочлены "с дефектом d ":

$$P_n^d(\Delta t) = \sum_{k=0}^n (\Delta t_d)^k \cdot C_k; \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 4.9. Если t — точка разрежения d , то

$$C_k = \frac{1}{k!} (P_n^d)^{(k)}(0); \quad (k = \overline{0, n}). \quad (17)$$

(Здесь $F_{ap}^{(k)}$ — аппроксимативная производная k -го порядка). Аналогичным образом определим теперь обобщенные степенные ряды "с дефектом d ":

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t - t_0)_d^n \cdot C_n. \quad (18)$$

Не обсуждая здесь весьма интересный вопрос об области сходимости рядов (18), мы лишь сформулируем аналог формул (17).

Теорема 4.10. Если E — полное отделимое ЛВП, и все ряды вида

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)(t - t_0)_d^{n-k} \cdot C_n$$

равномерно сходятся в некоторой окрестности t_0 , то

$$C_n = \frac{1}{n!} (F^d)_{ap}^{(n)}(t_0); \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где F^d — сумма ряда (18).

Заметим, что с помощью обобщенных рядов Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)_d^n}{n!} F_{ap}^{(n)}(t_0)$$

можно "склеивать" аналитические функции с константами. Пусть, например,

$$f(t) = e^{-1/t^2} \text{ при } -1 \leq t < 0, \quad f(t) = 0 \text{ при } t \geq 0.$$

При $d = [0, +\infty)$ имеем:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (t + 1)_d^n.$$

3. Формула Лагранжа-Стокса. Пусть w -дифференциальная k -форма, заданная на кусочно-гладкой компактной поверхности $S \in R^n$ порядка k , с коэффициентами из ЛВП E :

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} W_{i_1, \dots, i_k}(\bar{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k};$$

соответственно

$$\Phi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \varphi_{i_1, \dots, i_k}(\bar{x}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k};$$

k -форма на S с вещественными коэффициентами; B — замкнутое выпуклое множество в E . Если для каждого набора (i_1, \dots, i_k) :

$$W_{i_1, \dots, i_k}(\bar{x}) \in \Phi_{i_1, \dots, i_k}(\bar{x}) \cdot B,$$

то мы будем писать: $w(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x}) \cdot B$. Далее, будем говорить, что $w(d)$ имеет скалярную меру нуль ($d \subset S$), если для каждого набора (i_1, \dots, i_k) множество $W_{i_1, \dots, i_k}(d)$ - скалярной меры нуль.

Теорема 4.11 ("формула Лагранжа-Стокса"). Если w имеет скалярно суммируемые частные производные на $S \setminus d$, $w(d)$ - скалярной меры нуль, $dw(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x}) \cdot B$ при $\bar{x} \in S \setminus d$, Φ , имеет неотрицательные суммируемые коэффициенты на $S \setminus d$, то для любого $x^* \in E^*$:

$$\oint_{\partial S} \langle x^*, w \rangle \in \int_{S \setminus d} \Phi \cdot x^*(B). \quad (19)$$

Заметим, что оценка (3) является частным случаем оценки (19) при $S = [a, b]$.

Следствие 4.12 ("формула Стокса с дефектом d "). Если w — вещественная k -форма на S , имеющая суммируемые частные производные на $S \setminus d$, $w(d)$ - меры нуль, то

$$\oint_{\partial S} w = \oint_{S \setminus d} dw.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О.Г.Смолянов. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения.- М: изд-во МГУ, 1979.
2. И.В.Орлов. Обобщенная формула конечных приращений и ее приложения // Сб. "XI Всес. школа по теории операторов в функциональных пространствах". - Тезисы докладов. - Часть II.- Челябинск, 1986.
3. И.В.Орлов. Теорема Лагранжа и ее обобщение в свчоемной математике // Математика сегодня.- К: Вища школа, 1987.- С.169--188.
4. И.В.Орлов. Обобщенная формула конечных приращений и обобщенная формула Тейлора в локально выпуклом пространстве // Депонирована в УкрНИИНТИ 24.06.88., N 1626-Ук88. - 31 с.
5. Н.Бурбаки. Интегрирование (Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления).- М: Наука, 1970.
6. I.V.Orlov. Separable convex estimation in the Mean value theorem // Spectral and evolutional problems.- Vol. 3.- Simferopol, 1993.- P.103--104.
7. А.Фрелихер, В.Бухер. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы.- М: Мир, 1970.
8. I.V.Orlov. Mean value theorem for the homogeneously differentiable mappings// Spectral and evolutional problems.- Vol. 4. - Simferopol, 1995.- 5 pages (to appear)
9. H.R.Fisher. Limesaume // Math. Ann.- Vol.137, 1959.- P.269-303.
10. В.И.Авербух, О.Г.Смолянов. Дифференцирование и псевдотопология // Вестник Моск.ун-та.- Серия мат.,мех., 1972.- N 1.- С.3-8.
11. И.В.Орлов. Теорема об обратной функции в псевдотопологических линейных пространствах // Депонирована в УкрНИИНТИ 15.06.89, N1716-Ук89. - 53 с.
12. И.В.Орлов. Формула Лагранжа-Стокса // Сб. "XII Всес. школа по теории операторов в функциональных пространствах".- Тезисы докладов.- Часть II.- Тамбов, 1987.