ОБ ОДНОМ МАКСИМАЛЬНОМ ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВА С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Тышкевич Д. Л., аспирант кафедры алгебры и теории чисел

При исследовании линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве по "близости" к унитарному (т.е. с помощью дефектных операторов $I - T^*T$, $I - TT^*$) важную роль играет теорема о разложении любого ограниченного оператора на ортогональную сумму двух слагаемых: вполне не унитарного и унитарного (см., например, [1]). Напомним, что вполне неунитарным называется линейный (ограниченный) оператор, который в любом своем приводящем подпространстве не индуцирует унитарный оператор. Подобные вопросы для случая пространств с индефинитной метрикой изучались сравнительно (с гильбертовым случаем) мало. Заметим, что в случае π–полуунитарных операторов подобными вопросами занимался Штраус [2]. В данной статье предлагается частичное обобщение вышеупомянутой теоремы для случая пространств с индефинитной метрикой. Пусть $\mathbf{H}$ – гильбертово пространство, H_1 и H_2 – знаки в $\mathbf{H}$ (т.е. эрмитовы унитарные операторы). Через $T^\#$ обозначим оператор $H_2T^*H_1$ (сопряженный к T в индефинитном смысле).

Рассмотрим дефектные операторы:

$$\begin{aligned}
&\Delta_T = H_2 - T^*H_1T, && \Delta_{*T} = H_1 - TH_2T^*,\\
&\delta_T = I - T^\#T, && \delta_{\#T} = I - TT^\#,\\
&D_T = |\Delta_T|^{1/2}, && D_{*T} = |\Delta_{*T}|^{1/2},\\
&J_T = \operatorname{sign}\Delta_T, && J_{*T} = \operatorname{sign}\Delta_{*T},\\
&\Delta_T = H_2\delta_T, && \Delta_{*T} = \delta_{\#T}H_1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Будем говорить, что оператор $T - (H_1,H_2)-$ унитарен в (под)пространстве $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$, если $P_L H_2\delta_T P_L = P_L H_1\delta_{\#T}P_L = 0$, где P_L – ортопроектор в $\mathbf{H}$ на $\mathbf{L}$

(т.е. $[Th, Th']_{H_1} = [h, h']_{H_2}$, $[T^\#h, T^\#h']_{H_2} = [h, h']_{H_1}$; $h,h' \in \mathbf{L}$).

Рассмотрим подпространство

$$\mathbf{H}_T^0 = \bigcap_{n\geq 0} \operatorname{Ker} \delta_T T^n \cap \bigcap_{n\geq 0} \operatorname{Ker} \delta_{\#T} T^{\#n}.$$

Утверждение 1. Подпространство $\mathbf{H}_T^0$ инвариантно относительно T и $T^\#$, т.е. $\mathbf{H}_T^0 \in \operatorname{Lat}T \cap \operatorname{Lat}T^\#$, и в подпространстве $\mathbf{H}_T^0$ оператор T является $(H_1,H_2)-$ унитарным.

Доказательство. Пусть $h_0 \in \mathbf{H}_T^0$, рассмотрим Th_0:

(I) $\delta_T T^n Th_0 = \delta_T T^{n+1}Th_0 = 0$;

(II) $\delta_{\#T}T^{\#n}Th_0 = \delta_{\#T}T^{\#n-1}h_0 = 0$ $(n\geq 1)$, так как $h_0 \in \operatorname{Ker}\delta_T$, т.е. $h_0 = T^\#Th_0$;

(III) Ввиду равенства $T\delta_T = \delta_{\#T}T$ имеем $\delta_{\#T}Th_0 = T\delta_T h_0 =0$.

Таким образом, $Th_0 \in \mathbf{H}_T^0$.

Доказательство принадлежности $T^{\#}h_0$ пространству $\mathbf{H}_T^0$ обосновывается сходным с (I)–(III) образом, учитывая равенства $h_0 = TT^{\#}h_0$ и $T^{\#}\delta_{\#T} = \delta_T T^{\#}$.

Отметим, что в случае гильбертовой метрики, т.е. когда

$$H_1 = H_2 = I, \tag{2}$$

пространство $\mathbf{H}_T^0$ можно записать в виде

$$\mathbf{H}_T^0 = \{h \in \mathbf{H} \,/\, \|T^n h\| = \|T^{*n}h\| = \|h\|,\ n \in N\},$$

и оно, таким образом, в своем классическом представлении есть наибольшее (относительно порядка $\subset$) приводящее подпространство, в котором T индуцирует унитарный оператор. В случае произвольных знаков H_1 и H_2 это перестает быть верным. Строго говоря, $\mathbf{H}_T^0$ в общем случае не обязательно является даже верхней гранью (относительно $\subset$) множества всех подпространств из $\mathrm{Lat}T \cap \mathrm{Lat}T^{\#}$, в которых $T\,(H_1,H_2)$ – унитарен. Это объясняется тем, что при условии (2) для любого подпространства $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ из цепочки равенств $P_L H_2 \delta_T P_L = P_L H_1 \delta_{\#T} P_L = 0$ следует цепочка

$$\delta_T P_L = \delta_{\#T} P_L = 0,$$

откуда $T^n\mathbf{L} \subset \mathbf{L} \subset \mathrm{Ker}\delta_T$, $T^{\#n}\mathbf{L} \subset \mathbf{L} \subset \mathrm{Ker}\delta_{\#T}$, и, следовательно, $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}_T^0$. Когда знаки H_1 и H_2 отличны от единичного оператора, (3) может не выполняться, что показывает следующий

Пример 1. Пусть $\mathbf{L}$ – некоторое бесконечномерное подпространство пространства $\mathbf{H}$ и такое, что $\dim\mathbf{L} = \dim\mathbf{L}^{\perp}$ ($\mathbf{L}^{\perp} = \mathbf{H} \ominus \mathbf{L}$). Пусть $Z\colon \mathbf{L} \to \mathbf{L}^{\perp}$ – некоторый унитарный оператор. Определим оператор $H\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ матрицей относительно разложения $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^{\perp}$:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & Z^* \\ Z & 0 \end{bmatrix}.$$

Из определения оператора H явствует, что H – знак и

$$H\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\perp},\ H\mathbf{L}^{\perp} = \mathbf{L}. \tag{4}$$

Определим оператор $T\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ матрицей относительно разложения $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^{\perp}$:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \tag{5}$$

где T_{11}, T_{12}, T_{22} – некоторые ограниченные операторы, действующие в соответствующих пространствах. Полагаем $H_1=H_2=H$. Прямой проверкой убеждаемся, что $T\mathbf{L} \subset \mathbf{L}$ и

$$\delta_T P_L = \begin{bmatrix} I_L - Z^*T_{22}^*ZT_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_{\#T} P_L = \begin{bmatrix} I_L - T_{11}Z^*T_{22}^*Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Подберем операторы T_{11} и T_{12} таким образом, чтобы какой-либо из операторов $\delta_T P_L$, $\delta_{\#T} P_L$ был ненулевым. Между тем из (4) и (6) следует, что $P_L H \delta_T P_L = P_L H \delta_{\#T} P_L = 0$.

Рассмотренный пример показывает необходимость введения ограничений на множество соответствующих подпространств из $LatT \cap LatT^{\#}$ для того, чтобы $\mathbf{H}_T^0$ было верхней гранью данного множества относительно порядка $\subset$. Причем ограничения должны быть таковы, чтобы в случае (2) в это множество входили все подпространства из $LatT \cap LatT^{\#}$, в которых T (H_1,H_2)-унитарен (в данном случае – просто унитарен относительно гильбертовой метрики).

Рассмотрим множество $\boldsymbol{M}_T$ всех невырожденных относительно H_1- и H_2-метрики подпространств $\boldsymbol{L} \in LatT \cap LatT^{\#}$, в которых T (H_1,H_2)-унитарен. Тогда, с использованием утверждения 2 нетрудно убедиться, что верно следующее

Предложение. $\mathbf{H}_T^0$ является верхней гранью множества $\boldsymbol{M}_T$ (относительно $\subset$).

Отметим, что в общем случае $\mathbf{H}_T^0$ может не принадлежать множеству $\boldsymbol{M}_T$, так как $\mathbf{H}_T^0$ может оказаться вырожденным. Проиллюстрируем эту ситуацию.

Пример 2. Обращаясь к примеру 1, положим в матрице (5) $T_{11} = V$, $T_{12} = -{}^1/_2 VAZ^*$, $T_{22} = ZVZ^*$, где V – некоторый унитарный оператор, а A – самосопряженный в $\mathbf{L}$ с нулевым ядром:

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}. \tag{7}$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\delta_T T^n = \begin{bmatrix} 0 & AV^n Z^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_{\#T} T^{\#n} = \begin{bmatrix} 0 & VAV^{*n+1} Z^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

откуда, учитывая (7), следует цепочка равенств $\operatorname{Ker} \delta_T T^n = \operatorname{Ker} \delta_{\#T} T^{\#n} = \mathbf{L}$ $(n \geq 0)$; и, таким образом, $\mathbf{H}_T^0 = \mathbf{H}_T^{0[\perp]}$.

В заключение отметим следующее. Во-первых, в случае (2) $\boldsymbol{M}_T$ содержит все подпространства $\mathbf{L} \in LatT \cap LatT^{\#}$, в которых T (H_1,H_2) – унитарен, так как отпадает условие невырожденности. Во-вторых, к утверждению 2 можно привести альтернативную ветвь, налагая условия не на инвариантные подпространства оператора T, а на сам оператор: в частности, если T является (H_1,H_2) – двусторонним сжатием (т.е. $[Th, Th]_{H_1} \leq [h, h]_{H_2}$, $[T^{\#}h, T^{\#}h]_{H_2} \leq [h, h]_{H_1}$; $h \in \mathbf{H}$), то $\mathbf{H}_T^0$ является наибольшим элементом множества всех подпространств из $LatT \cap LatT^{\#}$, в которых T (H_1,H_2) – унитарен (в этом случае $\Delta_T \geq 0$, $\Delta_{*T} \geq 0$ и для соответствующего подпространства $\mathbf{L}$ из $LatT \cap LatT^{\#}$ линеалы $D_T\,\mathbf{L}$, $D_{*T}\,H_1\mathbf{L}$ оказываются нейтральными соответственно в метриках $[.\,,.]_{J_T}$, $[.\,,.]_{J_{*T}}$ – т.е. нулевыми, так как в данном случае $J_T = J_{*T} = I$ и т.д.). И последний момент: в отличии от случая гильбертовой метрики, вопрос о разбиении оператора T на сумму унитарного и вполне неунитарного (с соответствующими модификациями для индефинитной метрики) представляет значительную трудность для исследования (обычную для случая индефинитности метрики) ввиду того, что $\mathbf{H}_T^0$ может не оказаться проекционно полным (подробно о проекционной полноте см. [3]; как мы видели в примере 2, H_T^0 может даже совпадать со своей изотропной частью). Вопрос о проекционной полноте или ее отсутствии для пространства H_T^0 в данной статье не затрагивается.

Литература

1. Сёкефальви-Надь Б. Унитарные дилатации операторов в гильбертовом пространстве и смежные вопросы. //в кн. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Добавление 2. – М.: Мир. – 1979. – С. 512-560.
2. Штраус В. А. Об аналоге разложения Вольда для π-полуунитарных операторов. // Успехи мат. наук. – 1988. – Т. 43, № 1. – С. 185-186.
3. Азизов Т. Я., Йохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука. – 1986. – 352 с.