ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧАМИ ГИДРОМЕХАНИКИ

Царьков М. Ю., кандидат физико-математических наук, доцент

Методы функционального анализа, в первую очередь теории операторов, занимают заметное место в современной математической и теоретической физике. Использование этих методов, как правило, связано с предварительным выводом операторного уравнения для изучаемой задачи. Вывод такого уравнения часто осуществляется на основе уже имеющейся математической постановки задачи в виде системы дифференциальных уравнений, дополненной граничными условиями. По ряду причин такой подход нельзя считать естественным. Действительно, сначала из интегральных законов, например, механики выводятся дифференциальные уравнения, а затем на их основе выводится операторное уравнение, носящее интегральный характер. Кроме того, нередки случаи, когда вывод операторных уравнений по указанной схеме оказывается довольно громоздким и запутанным. В настоящей работе сделана попытка реализовать простой и прямой переход к операторному уравнению в одной весьма общей и важной задаче гидромеханики. Ее частный случай в классической постановке исследовался акад. Н.Н.Моисеевым [1], а операторным методом – Н.Н.Моисеевым и С.Г.Крейном [2]. В настоящей работе, как и в [3], основной является идея погружения всей задачи в интегральное тождество, в отличие от подхода работы [2], основанном на комбинированном использовании ортогонального проектирования и вспомогательных задач.

Приведем описание рассматриваемой гидромеханической системы. Абсолютно твердое тело с закрепленной точкой **O** имеет полость (не обязательно связную), заполненную несжимаемой идеальной жидкостью. Система находится в равновесии под действием стационарного потенциального поля массовых сил $G(x) = -\operatorname{grad} U(x)$. Пусть Ω – область, занятая жидкостью, $\rho(x)$ – равновесное распределение плотности. Тогда в Ω выполняется соотношение $\rho(x)G(x) = \operatorname{grad} P(x)$, где $P(x)$ – равновесное давление в жидкости. Отсюда, в частности, следует, что плотность локально постоянна на эквипотенциальных поверхностях. Сформулируем требования к гладкости $\rho(x)$. Допустим, что множество точек разрыва плотности образует поверхность Γ с конечным числом связных компонент, которые, очевидно, являются эквипотенциальными. Будем считать, что на $\Omega \setminus \Gamma$ плотность обладает непрерывными вплоть до границы производными первого порядка. Ясно, что тогда разрыв плотности на Γ является скачком, а величина скачка $[\rho]$ постоянна на связных компонентах поверхности Γ. Скачок определяется в соответствии с выбором единичной нормали n к Γ таким образом, что вектор $[\rho]n$ направлен в сторону увеличения плотности. Будем считать, что поля $\delta \times r$ условию непротекания не удовлетворяют. В противном случае потребуются незначительные изменения в следующих ниже построениях.

Примем, что смещения сосуда из положения равновесия описываются векторными полями вида $\delta \times r$. Здесь δ – так называемый вектор углового перемещения сосуда , а r – радиус-вектор точки x. Введем также векторное поле $u(x)$ смещений жидкости относительно сосуда, предполагая, что оно соленоидально, а на стенках сосуда удовлетворяет условию непротекания, то есть имеет нулевую нормальную составляющую, Таким образом, полное смещение жидкости описывается полем $u(x)+\delta \times r$.

Для записи билинейной формы потенциальной энергии нам понадобится вспомогательная билинейная форма: для произвольных достаточно гладких векторных полей u и w определим $\gamma(u,w)$ выражением

$$\int_\Omega (\nabla\rho \cdot u(x))(G(x)\cdot w(x))d\Omega + \int_\Gamma ([\rho]n\cdot u(x))(G(x)\cdot w(x))d\Gamma ,$$

где n – вектор единичной нормали к Γ. Точкой обозначено скалярное произведение векторов. Если скачки плотности отсутствуют, то второе слагаемое в записанной сумме обратится в нуль. Скачкообразное изменение плотности можно представить как предельное для гладких распределений плотности, тогда второе слагаемое в записанной формуле "восстановится" в результате предельного перехода.

Выясним, каким образом следует выбрать $\pi(u+\delta\times r, w+\eta\times r)$ – симметричную билинейную форму, чтобы соответствующая квадратичная форма совпадала с удвоенной потенциальной энергией системы. Предположим сначала, что поля u и w нулевые, то есть жидкость заморожена. Билинейная форма $\pi(\delta\times r,\eta\times r)$ вычисляется обычными методами линеаризации систем с конечным числом степеней свободы. Будем считать ее известной и обозначим $\omega(\delta,\eta)$. Предположим теперь, что $\delta = 0$, то есть сосуд не изменил своего положения, но произошло смещение $u(x)$ жидкости внутри полости, что привело к новому распределению плотности $\beta(x)$. Равновесие при этом нарушилось , то есть в системе появились неуравновешенные силы. Работа, которую эти силы совершают на перемещении $w+\eta\times r$, только знаком отличается от $\pi(u,w+\eta\times r)$. Пользуясь условием равновесия системы, получаем, что

$$-\pi(u, w+\eta\times r) = \int_\Omega (\beta(x)-\rho(x))G(x)\cdot(w+\eta\times x)d\Omega .$$

Учитывая несжимаемость жидкости, можем считать, что с точностью до малых второго порядка $\beta(x)-\rho(x) = -\nabla\rho(x)\cdot u(x)$ и, следовательно,

$$\pi(u,w+\eta\times r) = \gamma(u,w+\eta\times r) .$$

Естественно сохранить это соотношение и в том случае, когда имеются скачки плотности. Теперь простые вычисления приводят к результату

$$\pi(u+\delta\times r,w+\eta\times r) = \gamma(u+\delta\times r,w+\eta\times r) - \gamma(\delta\times r,\eta\times r) + \omega(\delta,\eta).$$

Замечание. При описании рассматриваемой гидромеханической системы говорилось о том, что жидкость заполняет полости тела. Случай частичного заполнения можно охватить проведенным рассуждением, если считать, что пустота заполнена жидкостью с нулевой плотностью.

Введем билинейную форму, связанную с кинетической энергией системы:

$$J\delta \cdot \eta + \int\limits_{\Omega} \rho(x)(v(x) + \delta \times r) \cdot (w(x) + \eta \times r) d\Omega.$$

Здесь J – тензор инерции сосуда. Аргументами этой билинейной формы являются векторные поля $v + \delta \times r$ и $w + \eta \times r$. Введем для нее обозначение

$$((v + \delta \times r, w + \eta \times r))$$

и заметим, что она удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Это основное скалярное произведение, связанное с задачей.

Пусть $u(t,x) + \delta(t) \times r$ –нестационарное векторное поле смещений, описывающее движение системы. Обозначая штрихом производные по времени t, можем записать работу сил инерции на перемещении $w(x) + \eta \times r$ в виде

$$-((u'' + \delta'' \times r, w + \eta \times r)).$$

С помощью нормы, соответствующей введенному скалярному произведению, можно выразить кинетическую энергию системы. Действительно, удвоенная кинетическая энергия равна квадрату нормы поля $u' + \delta' \times r$.

Предположим, что при движении системы на нее, кроме стационарного потенциального силового поля, о котором сказано выше, действуют нестационарные малые нагрузки, приложенные как к сосуду, так и к жидкости. Работа этих нагрузок на перемещении $w + \eta \times r$ для каждого фиксированного момента времени является линейным функционалом на линеале возможных перемещений. Обозначим его через $F(t)$, а соответствующее значение работы на перемещении будем записывать в виде $((F(t), w + \eta \times r))$., как это принято в теории оснащенных пространств, которая используется ниже.

Запишем уравнение динамики системы. Согласно известному принципу механики при движении системы сумма всех сил, действующих на нее, включая силы инерции, равна нулю. Таким образом, выполняется интегральное тождество

$$((u'' + \delta'' \times r, w + \eta \times r)) + \pi(u + \delta \times r, w + \eta \times r) = ((F(t), w + \eta \times r))$$

для всех смещений $w + \eta \times r$. Это соотношение естественно назвать уравнением работ. При его записи предполагалось, что система координат, относительно которой рассматривается движение, инерционная. Во вращающейся системе координат появляются кориолисовы силы и в левой части записанного тождества добавляется билинейная форма $\kappa(u' + \delta' \times r, w + \eta \times r)$, представляющая работу указанных сил. Интегральное представление данной формы легко выписывается. Не делая этого, отметим только, что она ограничена по отношению к введенному скалярному умножению.

Замечание. Из полученного интегрального тождества можно вывести классическую постановку задачи.

Осуществим переход к операторному уравнению. Введем гильбертовы пространства, связанные с рассматриваемой задачей, пространства полей с конечной потенциальной и кинетической энергией. Пусть $J_0(\Omega)$– известное пространство векторных полей $u(x)$ с компонентами из $L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям несжимаемости и непротекания в обобщенном смысле. Определим пространство H

как множество полей вида $u(x)+\delta \times r$ с $u(x)$ из $J_0(\Omega)$. На H определено введенное выше основное скалярное произведение и H полно по соответствующей норме. Определим пространство W как множество тех полей из H, у которых обобщенная нормальная составляющая на Γ принадлежит $L_2(\Gamma)$. Введем на W скалярное произведение как сумму скалярного произведения пространства H и скалярного произведения пространства $L_2(\Gamma)$, вычисленного для нормальных составляющих перемножаемых полей на Γ. Пространство W становится гильбертовым, причем плотно вложенным в H. Таким образом, W является оснащением H и, значит, можно ввести соответствующее негативное пространство W'.

Ясно, что билинейная форма потенциальной энергии определена и непрерывна на пространстве W. Следовательно, существует линейный и непрерывный оператор C, действующий из W в W' и такой, что

$$\pi(u+\delta \times r, w+\eta \times r) = ((C(u+\delta \times r), w+\eta \times r)).$$

Если в системе действуют кориолисовы силы, то соответствующая им билинейная форма допускает аналогичное представление с помощью оператора K. При этом K будет линейным и непрерывным оператором, действующим в пространстве H, так как соответствующая билинейная форма непрерывна на этом пространстве. Подставляя в уравнение динамики системы полученные представления для билинейных форм и учитывая произвольность поля $w+\eta \times r$ из W, приходим к операторному уравнению

$$(u+\delta \times r)'' + K(u+\delta \times r)' + C(u+\delta \times r) = F(t).$$

Здесь $F(t)$ – функция со значениями в W'.

Сделаем замечание о разрешимости задачи с начальными данными для этого уравнения. Допустим, что выполняется условие: векторы $[\rho]n$ и $G(x)$ на поверхности Γ одинаково направлены. Тогда билинейная форма потенциальной энергии полуограничена снизу по отношению к основному скалярному произведению. Пусть M – нижняя грань формы π. Введем на W новое скалярное произведение

$$\pi(u+\delta \times r, w+\eta \times r) + (M+1)((u+\delta \times r, w+\eta \times r)).$$

При этом произойдет перенормировка пространства W, то есть норма в этом пространстве заменится на эквивалентную. Оператор R, с помощью которого новое скалярное произведение представляется в виде $((R(u+\delta \times r), w+\eta \times r))$, в силу теоремы Рисса о функционалах на гильбертовом пространстве является изоморфизмом пространств W и W'. Для оператора C получается представление $C = R-(M+1)I$, что позволяет использовать результат, приведенный в [4]. Отметим также, что результаты об асимптотике спектра и собственных векторов, полученные в [5] для оператора T, справедливы для оператора C. Детальное изложение вопросов, затронутых в сделанных замечаниях, выходит за рамки данной работы.

Рассмотрим теперь вопрос о знакоопределенности формы потенциальной энергии. В дополнение к предыдущему предположим, что в Ω одинаково направлены $\nabla\rho$ и $G(x)$. Это обеспечит неотрицательность формы γ. Введем в Ω неотрицательные функции $\sigma(x)$, $g(x)$ и поле единичных векторов $m(x)$ так, чтобы имели место представления

$$\nabla\rho(x) = \sigma(x)m(x), \quad G(x) = g(x)m(x).$$

Определим в Ω меру S как сумму двух мер: первая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в Ω и имеет плотность $\sigma(x)g(x)$, а вторая сосредоточена на Γ, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на Γ и имеет плотность $[\rho]g(x)$. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Omega, dS)$, связанное с определенной выше мерой. Определим оператор T, действующий из W в это пространство по правилу: векторному полю u ставится в соответствие функция, равная $u(x)\cdot m(x)$ на $\Omega\setminus\Gamma$, а на Γ совпадающая с нормальной составляющей поля u на Γ. Тогда γ выражается через скалярное произведение введенного пространства следующим образом: $\gamma(u,w) = (Tu, Tw)$. С помощью нормы этого пространства можно записать удвоенную потенциальную энергию системы в виде

$$\|T(u+\delta\times r)\|^2 - \|T(\delta\times r)\|^2 + \omega(\delta,\delta)$$

Слагаемое, принимающее отрицательные значения, зависит только от δ. Поэтому достаточно исследовать на знакоопределенность инфимум этого выражения по u из $J_0(\Omega)$, равный квадратичной форме

$$\omega(\delta,\delta) - \|QT(\delta\times r)\|^2$$

где Q – ортопроектор в пространстве $L_2(\Omega, dS)$, проектирующий на замыкание $T(J_0(\Omega))$. Таким образом, неотрицательность формы потенциальной энергии эквивалентна неотрицательности некоторой квадратичной формы, заданной на трехмерном пространстве.

Замечание. Неотрицательность формы потенциальной энергии трактуется как устойчивость рассматриваемого положения равновесия (так называемая устойчивость по линейному приближению). Полученный результат, в частности, означает, что возможна ситуация, в которой неустойчивая система становится устойчивой при замерзании жидкости, заполняющей полости. В то же время имеются примеры, в которых функция $QT(\delta\times r)$ равна нулю при всех δ и, следовательно, замерзание жидкости на устойчивость влияния не оказывает.

Литература

1. Моисеев Н.Н.,Румянцев В.В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.– Москва: Наука, 1965.– 439 с.

2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан, Операторные методы в линейной гидродинамике.– Москва: Наука, 1989.– 416 с.

3. Царьков М.Ю. Об операторной формулировке одного класса задач линейной гидродинамики // В сб. “Динамические системы”.– 1994.– вып. 13.– с. 118-123.

4. Царьков М.Ю. О разрешимости дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами // Пятая Международная научная конференция имени академика М.Кравчука. Киев, 16-18 мая 1996 г.: Тезисы докладов / Киев, 1996.– с. 470.

5. Царьков М.Ю. Об асимптотике спектра и собственных векторов одной задачи гидромеханики // В сб. “Динамические системы”.– 1992.– вып.11.– с.47-51.