КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Яковлев А. В., аспирант кафедры математического анализа

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела с полостью, полностью заполненной вязкоупругой жидкостью. В точке закрепления маятника О, которая не совпадает с центром масс системы С, имеется шарнир.

Мы будем исследовать поведение системы в плоском случае; полученные ниже результаты могут быть обобщены на случай сферического маятника, т.е. пространственного движения тела с жидкостью.

Введем подвижную систему координат $Ox_1\, x_2$ и жестко свяжем ее с телом. Будем считать, что в невозмущенном состоянии система покоится, а затем начинает совершать малые движения вокруг точки закрепления.

Линеаризованное уравнение момента количества движения системы имеет вид (см. например, [1, стр. 196]):

$$J_1 \frac{d^2\delta}{dt^2} + \rho \int_\Omega (r \times \frac{\partial^2 w}{dt^2}) d\Omega + \alpha \frac{d\delta}{dt} + m_0 gl\,\delta = M(t) \qquad (1)$$

где M(t) – момент внешних сил относительно точки О, $0<J_1=J_b+J_f$ – компонента тензора инерции твердого тела и жидкости относительно точки О, $\bar{w}(t,x)$ – поле относительных смещений частиц жидкости, $x=(x_1,x_2)\in\Omega\subset \mathbf{R}^2$, $m_0=m_b+\rho\int d\Omega = m_b+\rho|\Omega|$ – масса всей системы, $\bar{l}=|OC|$, g – ускорение силы тяжести, $\alpha>0$ – коэффициент трения в подшипнике, $\bar{\delta}(t)$ – угол отклонения твердого тела от состояния равновесия.

Уравнение движения вязкоупругой жидкости в неподвижном сосуде описаны в [2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu E_0(t)(\Delta u) + f,\\
&div\, u = 0,\\
&u = 0,\\
&u(o,x) = u^0(x)
\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\bar{u}(t,x)$ – поле скоростей жидкости, $\gamma_j \in \mathbf{R}+$, $\alpha_j>0$.

В подвижном маятнике имеются дополнительные переносные члены (см., например, [3], стр. 52). В этом случае взамен (2) приходим к следующему уравнению движения вязкоупругой жидкости:

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 w}{dt^2} + \rho\frac{d^2\delta}{dt^2}\times r = -\nabla p + \mu E_0(t)(\Delta\frac{\partial w}{\partial t}) + \rho\bar{f}(t,x),\\
&w = 0,\\
&div\, w = 0,
\end{aligned} \qquad (3)$$

$$E_0(t)v(t,x) = v(t,x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^t \exp(-\gamma_j(t-s))v(s,x)ds,$$

где $\mu=\rho\nu$, ν – кинематическая вязкость.

Для полной постановки начально-краевой задачи введем начальные условия:

$$w(0,x) = w^0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0,x) = u^0(x), \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \frac{d\delta}{dt} = \vec{a}^0. \tag{4}$$

Уравнения (1),(3),(4) определяют начально-краевую задачу о малых движениях плоского маятника с полостью, полностью заполненной вязкоупругой жидкостью.

2. При исследовании этой задачи применим операторный подход, описанный например в [1]. Рассмотрим ортогональное разложение пространства векторных функций $\overline{L}_2(\Omega)= \overline{J}_0(\Omega)\oplus \overline{G}(\Omega)$ от системы уравнений (1), (3) перейдем к дифференциальному уравнению в ортогональной сумме подпространств

$$\hat{H} := \bigoplus_{j=0}^{m} J_0(\Omega) \oplus C^2.$$

.Для этого введем новые искомые функции

$$u_0 := \frac{dw}{dt},$$

$$u_j := \mu^{1/2}\alpha_j^{1/2}\int_0^t \exp(-\gamma_j(t-s))A_0^{1/2}u_0(s)ds, \ j=\overline{1,m}, \tag{5}$$

$$u_{m+1} := \frac{d\vec{\delta}}{dt},$$

$$u_{m+2} := \vec{\delta}.$$

где A_0 оператор Стокса, свойства которого широко известны и описаны например в [1].

Если функции u_j (t) непрерывно дифференцируемы, то

$$\frac{du_j}{dt} = \mu^{1/2}\alpha_j^{1/2}A_0^{1/2}u_0 - \gamma_j u_j, \ j=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Применим к уравнению (3) справа оператор P_0 проектирования на подпространство $\overline{J}_0(\Omega)$. Тогда, рассматривая совместно проекцию уравнения (3) на подпространство $\overline{J}_0(\Omega)$, уравнения (1), (5) и (6), учитывая введенные обозначения, а также соотношение

$$\frac{du_{m+2}}{dt} - u_{m+1} = 0$$

приходим к системе уравнений:

$$\rho\frac{du_0}{dt} + \rho P_0(\frac{du_{m+1}}{dt}\times r) + \mu[A_0u_0 + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j \int_0^t \exp(-\gamma_j(t-s))A_0u_0ds] = \rho P_0 f,$$

$$\frac{du_j}{dt} = \mu^{1/2}\alpha_j^{1/2} A_0^{1/2} u_0 - \gamma_j u_j, \; j = \overline{1,m}. \tag{7}$$

$$J_1 \frac{du_{m+1}}{dt} + \rho \int_{\Omega} (r \times \frac{\partial u_0}{dt}) d\Omega + \alpha \, u_{m+1} + m_0 glu_{m+2} = M(t),$$

$$m_0 gl \frac{du_{m+2}}{dt} - m_0 glu_{m+1} = 0.$$

Запишем систему (7) в векторно-матричном виде:

$$\frac{d}{dt} A\hat{u} + B\hat{u} = F(t), \hat{u}(0) = \hat{u}^0, \tag{8}$$

$$A\hat{u} = \begin{pmatrix} \rho u_0 + \rho P_0(u_{m+1} \times \vec{r}) \\ u_1 \\ \ldots \\ \rho \int_{\Omega} (\vec{r} \times u_0) d\Omega + J_1 u_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$B\hat{u} = \begin{pmatrix} \mu A_0 u_0 + \mu^{1/2}\alpha_1^{1/2} A_0^{1/2} u_1 + \ldots + \mu^{1/2}\alpha_1^{1/2} A_0^{1/2} u_m \\ -\mu^{1/2}\alpha_1^{1/2} A_0^{1/2} u_0 + \gamma_1 u_1 \\ \ldots \\ \alpha u_{m+1} + m_0 glu_{m+2} \\ -m_0 glu_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{m+2})^t, \; F(t) = (\rho P_0 f, 0, \ldots, M(t), 0)^t.$$

4. Исследуем свойства полученных операторных матриц.

Лемма 1. ***Оператор А является ограниченным, самосопряженным и положительно определенным в пространстве $H\wedge$.***

Доказательство: Оператор А представим в матричной форме:

$$A\hat{u} = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 & A_{02} \\ 0 & I & 0 \\ A_{02}^{*} & 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \hat{u}_m \\ u_\sigma \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{u} = (u_1, \ldots, u_m)^t, u_\sigma = (u_{m+1}, u_{m+2}),$$

$$A_{00} u_0 = \rho u_0, \; A_{02} u_{m+1} = \rho P_0 (u_{m+1} \times r),$$

$$A_{22} u_\sigma = \begin{pmatrix} J_1 u_{m+1} & 0 \\ 0 & m_0 glu_{m+2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор А можно представить в виде суммы:

$$A = diag(\rho I,...,I,J_1I,m_0glI)+\begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{02}^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Очевидно из представления (9), что оператор является положительным. Поскольку $J_l>0$, а также $\rho>0$, $m_0>0$, $g>0$, то диагональный оператор в (9) положительно определен. Второй оператор является конечномерным.

Таким образом, оператор А равен сумме положительно определенного и конечномерного, из чего можно сделать вывод, что оператор А положительно определен.(см. [1, стр. 198]).

Исходя из представления оператора А и свойств слагаемых заключаем, что оператор обладает свойством ограниченности.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь свойства оператора В и будем считать сначала, что

$$D(B) = \{\hat{u} : u_0 \in D(A_0)\}.$$

Лемма 2. ***Оператор –В является диссипативным оператором.***

Доказательство: Представим оператор В в виде:

$$B\hat{u} = \begin{pmatrix} B_{00} & B_0 & B_{02} \\ -B_{01}^* & B_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ \hat{u}_m \\ u_\sigma \end{pmatrix},$$

где

$$B_{00} = \mu A_0, B_\gamma = (\gamma_1 I,...,\gamma_m I),$$

$$B_{22} = \begin{pmatrix} \alpha I & m_0glI \\ -m_0glI & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, исходя из представления оператора В легко видеть, что Re $(B\,\bar{u}, \bar{u})\geq 0$, Re $(B^*\,\bar{u}, \bar{u})\geq 0$.

Лемма доказана.

Для однозначной разрешимости полученной задачи Коши необходимо замкнуть оператор В. Поскольку оператор B_{22}: $C^2 \to C^2$ ограничен, то для замыкания оператора В необходимо замкнуть блок

$$\begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ -B_{01}^* & B_\gamma \end{pmatrix}.$$

Аналогичный оператор был рассмотрен в [4], где изучалась задача о малых движениях вязкоупругой жидкости в неподвижном сосуде. Опираясь на результаты этих исследований, приходим к выводу, что замыкание оператора В имеет вид:

$$B\hat{u}=\begin{pmatrix} A_0^{1/2}(\mu A^{1/2}{}_0u_0+\mu^{1/2}\alpha_1^{1/2}u_1+\ldots+\mu^{1/2}\alpha_1^{1/2}u_m) \\ -\mu^{1/2}\alpha_1^{1/2}A_0^{1/2}u_0+\gamma_1u_1 \\ \ldots \\ \alpha u_{m+1}+m_0glu_{m+2} \\ -m_0glu_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$D(B)=\{(u_0,u_1,\ldots,u_{m+1},u_{m+2}):u_0\in D(A_0),\mu^{1/2}A_0^{1/2}u_0+\mu^{1/2}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^{1/2}u_j\in D(A_0^{1/2})\}.$$

Исследуем свойства оператора $\overline{\text{B}}$.

Лемма 3. ***Замыкание оператора В является максимально диссипативным оператором.***

Доказательство этой леммы аналогично доказательству Леммы 2.

Лемма 4. ***Оператор*** $-A^{-1}\overline{B}$ ***является максимальным диссипативным в пространстве*** $\overline{H}_A$. *Доказательство:* Введем в пространстве $\overline{\text{H}}$ новое скалярное произведение $<\overline{u},\ \overline{v}>=(A\ \overline{u},\ \overline{v})$. Тогда Re $<A^{-1}\ \overline{B}\ \overline{u},\ \overline{u}>$=Re $(\ \overline{B}\ \overline{u},\ \overline{u})\geq c\|\ \overline{u}\|^2$. Re $<(A^{-1}\ \overline{B})^*\ \overline{u},\ \overline{u}>$=Re $<\overline{u},\ A^{-1}\ \overline{B}\ \overline{u}>$=
Re $<A^{-1}\ \overline{u},\ \overline{B}\ \overline{u}>$=Re $(\ \overline{u},\ \overline{B}\ \overline{u})$=Re $(\ \overline{B}\ \overline{u},\ \overline{u})\geq c\ \|\ \overline{u}\|^2$.

Таким образом, оператор $-A^{-1}\ \overline{B}$ является максимальным диссипативным. Лемма доказана.

Преобразуем уравнение (8), подействовав справа оператором A^{-1}:

$$\frac{d\hat{u}}{dt}+A^{-1}\overline{B}\hat{u}=A^{-1}F(t),\hat{u}(0)=\hat{u}^0. \tag{10}$$

Из леммы следует, что задача (10) является задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка с максимальным диссипативным оператором. Тогда задача (10) имеет единственное сильное решение, определяемое формулой

$$\hat{u}(t)=\Psi(t)\hat{u}^0+\int_0^t\psi(t-s)A^{-1}F(s)ds, \tag{11}$$

где $\psi(t)$ – сжимающая полугруппа, отвечающая оператору $A^{-1}\ \overline{B}$.
Таким образом, мы пришли к теореме:

Теорема 1. ***Если в задаче Коши (7)*** $\overline{u}^0\in D(A_0)$, $\overline{f}(t)$ ***– непрерывно дифференцируемая функция в пространстве*** $L_2(\Omega)$, ***то задача Коши имеет единственное сильное решение.***

Возвращаясь к исходной задаче, получаем теорему:

Теорема 2. ***Если*** $\overline{u}^0\in C^2(\Omega)$, $\overline{f}$ ***– непрерывно дифференцируемая функция со значениями в*** $\overline{L}_2(\Omega)$, ***то задача Коши имеет единственное сильное решение.***

Автор благодарит профессора Н.Д. Копачевского за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Литература

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. - М.: Наука,1989.- 519 с.
2. Орлова Л.Д. Диссертация на соискание научной степени кандидата физ.-мат. Наук.- Симферополь. –1997.-138 с.
3. Kopachevsky N.D., Volodkovich E.D. Small ocsillations of a plain pendulum with a cavity wholly filled with a viscous fluid.- Simferopol.- 1994.-250 с.

4. Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости.-СПб.- Труды СПб математического общества,- 1998 (в печати).