УДК 531.49+514.8

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ ЭЙНШТЕЙНА-МАКСВЕЛЛА С ОДНОРОДНЫМ НЕИЗОТРОПНЫМ ТЕНЗОРОМ МАКСВЕЛЛА

Леляков А.П.[1]

В работе изучена динамика замкнутой нуль-струны в области сталкивающихся плоских волн. Показано, что движение замкнутой нуль-струны в этой области будет ограниченным. Полученные в работе точные решения могут служить основой как для построения квантовой теории протяженных объектов, так и в космологии.

Сейчас уже с уверенность можно утверждать о появлении нового направления в космологии – космологии протяженных объектов [1]. Уже первые шаги, предпринятые в этом направлении показали, что идеальная жидкость нуль-р-бран [2] может рассматриваться в качестве доминантного источника гравитации для Вселенных Фридмана с к=0. В связи с этим актуальными являются вопросы о решении уравнений движения струны (нуль-струны) в различных искривленных пространствах и самосогласованном рассмотрении струн (нуль-струн) в качестве доминантных источников гравитации в рассматриваемых пространствах. Изложение указанных вопросов осложняется нелинейным характером уравнений движения струны (нуль-струны), которые проинтегрированы для небольшого числа специальных метрик [3-5].

Предлагаемая вниманию работа посвящена нахождению точных решений уравнений движения нуль-струн в метрике Бертотти-Робинсона, которая описывает зону взаимодействия сталкивающихся плоских волн в теории Эйнштейна-Максвелла. Хорошо известно, что единственным однородным полем Эйнштейна-Максвелла с однородным неизотропным тензором Максвелла является решение вида

$$dS^2 = k^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2 + dx^2 - sh^2(x)dt^2\right) \tag{1}$$

где k –произвольная постоянная. Впервые это решение было получено в работах [6,7].

Динамика нуль-струны в псевдо-римановых пространствах описывается системой уравнений [2]

$$x^M_{,\tau\tau} + \Gamma^M_{PQ}\, x^P_{,\tau}\, x^Q_{,\tau} = 0 \tag{2}$$

дополненной связями

$$g_{\mu\nu}x^\mu_{,\tau}x^\nu_{,\tau} = 0;\, g_{\mu\nu}x^\mu_{,\tau}x^\nu_{,\sigma} = 0 \tag{3}$$

---

[1]Кафедра теоретической физики

где Γ^{M}_{PQ} – символы Кристофеля, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор для данного пространства-времени , а

$$x_{,\tau} = \frac{\partial x}{\partial \tau}, x_{,\sigma} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} \tag{4}$$

τ, σ – координаты на мировой поверхности нуль-струны.

Систему (2), (3) для замкнутых нуль-струн необходимо также дополнить условием периодичности по σ

$$x^{M}(\tau,\sigma) = x^{M}(\tau,\sigma+2\pi)$$

Подставляя явный вид метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и символы Кристофеля в (2), (3) получим следующую систему уравнений, описывающих динамику нуль-струны в зоне взаимодействия сталкивающихся плоских волн

$$t_{,\tau\tau} + 2cth(x)t_{,\tau}x_{,\tau} = 0, \quad \theta_{,\tau\tau} - \frac{1}{2}\sin(2\theta)(\varphi_{,\tau})^2 = 0,$$

$$x_{,\tau\tau} + \frac{1}{2}sh(2x)(t_{,\tau})^2 = 0, \quad \varphi_{,\tau\tau} + 2ctg(\theta)\varphi_{,\tau}\theta_{,\tau} = 0$$

(5)

$$sh^2(x)t^2_{,\tau} - x^2_{,\tau} - \theta^2_{,\tau} - \sin^2(\theta)\varphi^2_{,\tau} = 0 \tag{6}$$

$$sh^2(x)t_{,\tau}t_{,\sigma} - x_{,\tau}x_{,\sigma} - \theta_{,\tau}\theta_{,\sigma} - \sin^2(\theta)\varphi_{,\tau}\varphi_{,\sigma} = 0 \tag{7}$$

первый интеграл от (5) приводит к системе,

$$t_{,\tau} = \frac{C_0}{sh^2(x)}, \varphi_{,\tau} = \frac{C_3}{\sin^2(\theta)}$$

$$x^2_{,\tau} = \frac{C_0^2}{sh^2(x)} + C_1, \theta^2_{,\tau} = C_2 - \frac{C_3^2}{\sin^2\theta}, \tag{8}$$

где:

$$C_i = C_i(\sigma), i = 0,1,2,3$$

Подставляя (8) в (6) легко убедиться, что связь (6) принимает вид

$$C_1 = -C_2 \tag{9}$$

Используя (9), проинтегрируем (8), и переходя от параметра τ к реальному времени t, находим

$$x(t,\sigma) = Arcch\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{1+W^2}}\right\}, \theta(t,\sigma) = \arccos\left\{\frac{\beta\cos(\lambda)(1+Wtg(\lambda))}{\sqrt{1+W^2}}\right\},$$

$$\varphi(t,\sigma) = \varphi_0 + \begin{cases} arctg\left\{\gamma\left[\frac{1 \pm Wtg(\lambda)}{W-(\pm tg(\lambda))}\right]\right\} \forall C_3 \neq 0 \\ 0, для C_3 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

где:

$$\alpha = \sqrt{1+\frac{C_0^2}{C_2}}, \beta = \sqrt{1-\frac{C_3^2}{C_2}}; \gamma = \frac{C_3}{\sqrt{C_2}},$$

$$\mu = \frac{C_0}{\sqrt{C_2}}, x^i = x^i(\tau,\sigma), x_0^i = x_0^i(\sigma), i = 0,1,2,3$$

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = \theta, x^3 = \varphi,$$

$$U_\theta = U_\theta(\sigma) = \arcsin\left(\frac{\cos\theta_0}{\beta}\right), U_x = U_x(\sigma) = \arcsin\left(\frac{chx_0}{\alpha}\right),$$

$$W = W(t,\sigma) = \mu th(t_0 - t), \lambda = \lambda(\sigma) = U_x + U_\theta$$

При этом, второе уравнение связи записывается следующим образом

$$C_0 t_0' - C_3\varphi_0' - \sqrt{C_2}\lambda' = 0 \qquad (11)$$

Приведем пример набора начальных данных, удовлетворяющих связи (11),

$$t_0 = 0, \varphi_0 = \sin\sigma, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, x_0 = Arch(\sqrt{2}),$$
$$C_0 = C_2 = 1, C_3 = 0 \qquad (12)$$

Для этих начальных данных система (10) переписывается в виде

$$x = Arcch\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+th^2(t)}}\right\}, \theta = \arccos\left\{\frac{th(t)}{\sqrt{1+th^2(t)}}\right\}, \varphi = \sin(\sigma) \qquad (13)$$

Можно заметить, что система (13) описывает движение вырожденно замкнутой нуль-струны, причем это движение ограничено.

$$0 \le x \le Arcch\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}, 1 \le \varphi \le 1$$

Полученные в работе решения могут быть использованы в качестве нулевого приближения для исследования динамики струны в рамках теории возмущений [8].

В заключение хочу поблагодарить Арифова Л.Я. и Рощупкина С.Н. за плодотворные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Vilenkin A. // Phys. Rep. – 1985. – V. 121. – 264 p.
2. Roshchupkin S.N., Zheltukhin A.A. // Class. Quant. grav. – 1995. – V. 12. – 2519 p.
3. Sanchez N. and Veneziano G. // Nucl. Phys. – 1990. – V. 333. – 253 p.
4. Gasperini M., Sanchez N. and Veneziano G. // Nucl. Phys. – 1991. – B. 364. – 265 p.
5. Gasperini M. and Veneziano G. // Phys. Rev. – 1994. – D. 50. – 2519 p.
6. Bertotti B. Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity // Phys. Rev. – 1959 – V. 116. – 1331 p.
7. Robinson I. A solution of the Einstein-Maxvelle quations // Bull. Acod. Polon. Sci, Ser. math. Astr. Phys. – 1959. – V. 7. – 351 p.
8. Желтухин А.А., Рощупкин С.Н. // ТМФ. – 1997. – Т. III – № 3. – 402 с.

Анотація

Леляков О.П. Точне рішення рівнянь руху замкнутої нуль-струни у однорідному полі Ейнштейна-Максвелла з однорідним неізотропним тензором Максвелла // Вчені записки ТНУ, 2000, 99, № 1, 3-4.

У роботі вивчена динаміка замкнутої нуль-струни в області плоских хвиль, що зштовхуються. Показано, що прямування замкнутої нуль-струни в цій області буде обмеженим. Одержані в роботі точні рішення можуть бути основою як для побудови квантової теорії протяжних об'єктів, так і в космології.

Summary

Lelyakov, A.P. Exact solutions of the equations for the motion of the closed zero-string in the homogeneous field of Einstein-Maxvell with the homogeneous non-isotropic tensor of Maxvel // Uchenye zapiski TNU, 2000, 99, №. 1, 3 - 4.

The work is dedicated the study of a dinamic of closed zero-string in the zone of colliding plane waves. It is shown, that a motion of the closed zero-string will be restricted in this zone. The obtained exact solutions in work must serve the basis as for the construction of Quantum theory of extent objects so as for the cosmology.