ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СТРУН В КРОТОВЫХ НОРАХ С ЛОРЕНЦЕВОЙ СИГНАТУРОЙ

Рощупкин С. Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент, Зинченко Е. Н., аспирант

В последние годы большое внимание уделяется построению струнной космологии. В связи с этим очень актуальным является вопрос о нахождении точных решений уравнений струны во внешних гравитационных полях.

В предлагаемой работе анализируются уравнения движения и кинематические связи для струны в гравитационном поле кротовой норы с лоренцевой сигнатурой [1]. Наряду с решениями, описывающими открытые струны, рассматриваются также решения описывающие замкнутые струны. Случай замкнутых струн особенно важен, так как не для всех искривленных пространств имеют место такие решения.

Если рассматривать только стационарные струны во внешнем стационарном пространстве-времени, то уравнения движения замечательным образом упрощаются. Уравнения движения и связи для бозонной струны, движущейся в псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, получаются варьированием действия Намбу-Гото [2]

$$\ddot{x}^{\mu} - x''^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\left(\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\sigma} - x'^{\rho}x'^{\sigma}\right) = 0, \tag{1}$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}x'^{\nu} = 0,\ \ g_{\mu\nu}(\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - x'^{\mu}x'^{\nu}) = 0, \tag{2}$$

где точка и штрих обозначают производные по τ и σ соответственно (τ, σ – листовые переменные).

Будем искать стационарные решения системы (1), (2) в виде

$$t = \tau, \qquad x^{i} = x^{i}(\sigma), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

В этом случае уравнения движения (1) и кинематические связи (2) существенно упрощаются и принимают вид:

$$x''^{i} + 2\Gamma^{i}_{jk}x'^{j}x'^{k} - \Gamma^{i}_{00} = 0, \tag{4}$$

$$g_{00} + g_{ij}x'^{i}x'^{j} = 0,\ \ i, j, k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где – символы Кристоффеля внешнего пространства.

Используя явный вид метрического тензора и символов Кристоффеля для лоренцевой кротовой норы, перепишем уравнения (4), (5) в виде:

$$l'' - 2l(\theta')^2 - 2l\sin^2\theta(\varphi')^2 = 0, \tag{6}$$

$$\theta'' + \frac{2l}{b_0^2 + l^2}\theta' l' - 2l\sin\theta\cos\theta(\varphi')^2 = 0, \tag{7}$$

$$\varphi'' + \frac{2l}{b_0^2 + l^2}l'\varphi' + 2\cdot\mathrm{ctg}\theta\cdot\theta'\varphi' = 0, \tag{8}$$

$$1 - (l')^2 - (b_0^2 + l^2)\left[(\theta')^2 + \sin^2\theta\cdot(\varphi')^2\right] = 0. \tag{9}$$

где l, и, ц – радиальные и угловые переменные в сферической системе координат.

Рассмотрим движение струны в плоскости $\theta = \pi/2$. В этом случае уравнение (7) выполняется тождественно, а оставшиеся уравнения упростятся. В результате находим

$$l'' - 2l(\varphi')^2 = 0, \tag{10}$$

$$\varphi'' + \frac{2l}{b_0^2 + l^2} l'\varphi' = 0, \tag{11}$$

$$1 - (l')^2 + (b_0^2 + l^2)\varphi'^2 = 0. \tag{12}$$

Уравнение (11) легко интегрируется и мы получаем

$$\varphi' = \frac{C}{b_0^2 + l^2}, \tag{13}$$

где C – константа интегрирования. Подставляя далее (13) в (12) приходим к уравнению

$$l' = \sqrt{1 + \frac{C^2}{b_0^2 + l^2}}. \tag{14}$$

Решение уравнений (13), (14) может быть выражено через эллиптические интегралы. В результате получаем следующее решение:

$$t = \tau, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi - \varphi_0 = kF(\psi, k),$$

$$\sigma - \sigma_0 = F(\psi, k) - \frac{1}{1 - k^2} E(\psi, k) + \frac{l}{b_0(1 - k^2)} \sqrt{\frac{b_0^2 + (1 - k^2)l^2}{b_0^2 + l^2}}, \tag{15}$$

где φ_0, σ_0 – константы интегрирования, а

$$F(\psi, k) = \int_0^\psi (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt, \quad E(\psi, k) = \int_0^\psi (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2} dt, \tag{16}$$

$$\psi = \arcsin\frac{l}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}, \quad k = \frac{C}{\sqrt{b_0^2 + C^2}}$$

– эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Полагая в решении (15) C = 0 получаем следующую простую конфигурацию струны

$$t = \tau, \quad l = b_0(\sigma - \sigma_0), \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi_0. \tag{17}$$

Приведенное решение описывает прямую струну.

Легко заметить, что уравнения (6)–(9) допускают решение в виде замкнутой струны

$$t = \tau, \quad l = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = C \cdot \sigma, \tag{18}$$

причем в силу уравнения связи (9) $C = 1/b_0$, где b_0 – радиус горловины кротовой норы. Полученные в работе решения могут служить основой для построения квантовой теории струны в лоренцевых кротовых норах.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А. Желтухину за обсуждение полученных результатов и критические замечания.

Эта работа поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований № Ф4/1751.

Литература

1. S.W. Hawking. Wormholes in spacetime. Phys. Rev. D., vol 37, № 4, p 904-910, 1998
2. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. Модель релятивисткой струны в физике адронов. Москва. Энергоатомиздат 1987. 175 стр.